

журнал[©] Квант ЯНВАРЬ 2007 № 1 ФЕВРАЛЬ 2007

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин

(заместитель главного редактора),

В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, П.А.Кожевников,
В.В.Козлов, С.П.Коновалов, А.А.Леонovich,
Ю.П.Лысов, В.В.Можаев, В.В.Произволов,
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко,

В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро



Квантум

© 2007, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Этуд о формуле Эйлера. *В.Рыжик, Б.Сотниченко*
9 Вверх и вниз через атмосферу. *К.Богданов*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 13 Шведская линия. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 15 Задачи М2026–М2035, Ф2033–Ф2042
17 Решения задач М2006–М2010, Ф2018–Ф2027

ИНФОРМАЦИЯ

- 23 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

К М Ш

- 24 Задачи
25 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
25 Самое запутанное дело-2. *В.Китайский*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 28 Мосты и парашюты. *В.Вышинский*
29 Критическое поведение. *Э.Руманов*
31 Людмила, Черномор и шапка-невидимка. *А.Стасенко*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Лед, вода и пар

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 35 Математика турниров. *А.Заславский, Б.Френкин*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 40 Несколько задач на закон сохранения механической энергии. *А.Черноуцан*

ВАРИАНТЫ

- 44 Материалы вступительных экзаменов 2006 года

- 53 Ответы, указания, решения

Памяти Виктора Васильевича Можаева (14)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье К.Богданова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Физики и математики на монетах мира*

Этюд о формуле Эйлера

В.РЫЖИК, Б.СОТНИЧЕНКО

ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА, ВПИСАННОГО В ОКРУЖНОСТЬ радиуса R и описанного около окружности радиуса r , известна формула Эйлера:

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

где d – расстояние между центрами этих окружностей. Эта формула доказывается во многих задачниках¹. В некоторых книгах² можно найти формулу Эйлера для четырехугольника; при этом указана только зависимость между этими величинами, но нет явного выражения для одной из них. Встает естественный вопрос – можно ли получить соответствующую формулу для произвольного n -угольника (разумеется, выпуклого)?

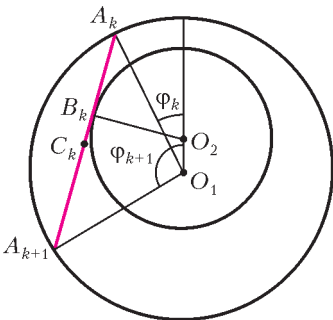


Рис. 1

В настоящей статье мы ответим на этот вопрос, и ответ будет утвердительным. Доказательство будет основано на кинематических соображениях. С ними можно познакомиться по книгам³, а также по нашим предыдущим статьям (см. «Квант» №5 за 2002 г. и №1 за 2005 г.).

В дальнейшем мы будем употреблять такую систему обозначений и терминов в n -угольнике (рис.1):

- k – номер элемента n -угольника,
- R – радиус описанной окружности,
- r – радиус вписанной окружности,
- O_1 – центр описанной окружности,
- O_2 – центр вписанной окружности,
- O_1O_2 – линия центров,
- d – расстояние между центрами O_1, O_2 ,
- $\rho = r/R$,
- $\delta = d/R$,
- A_k – k -я вершина n -угольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$,
- $a_k = A_kA_{k+1}$ – сторона n -угольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$,
- B_k – точка касания стороны n -угольника a_k и вписанной окружности,
- $R_k = O_1A_k$ – радиус описанной окружности, проведенный в вершину A_k ,
- $r_k = O_2B_k$ – радиус вписанной окружности, проведенный в точку касания B_k ,
- C_k – середина стороны a_k ,
- $b_k = A_kB_k$ – длина отрезка касательной,

¹ См., например, книгу: В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2001.

² См., например, книгу: З.А.Скопец, В.А.Жаров. Задачи и теоремы по геометрии. Планиметрия. – М.: Учпедгиз, 1962.

³ См., например, книгу: Ю.И.Любич, Л.А.Шор. Кинематический метод в геометрических задачах. – М.: Наука, 1976.

$\varphi_k = \angle A_kO_1O_2$ – угол между радиусом R_k и линией центров O_1O_2 ,

$\alpha_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ – угол, под которым сторона A_kA_{k+1} видна из центра O_1 ,

$\dot{\varphi}_k = (\varphi_k)'_t = \omega_k$ – угловая скорость радиуса R_k .

Треугольник и две окружности (треугольник Эйлера)

Начнем с такого построения. Пусть нам даны окружность радиуса R с центром O_1 (большая окружность) и окружность радиуса r с центром O_2 (меньшая окружность), расположенная внутри первого круга.

Пусть A_1 – произвольная точка большей окружности. Проведем ее радиус O_1A_1 . Из точки A_1 проведем касательную к меньшей окружности, и точку, в которой она пересечет большую окружность, назовем A_2 . Аналогично получим точки A_3 и A_4 (рис. 2, а, б). Нам бы хотелось получить совпадение точек A_4 и A_1 , так как в этом случае мы получаем треугольник, вписанный в большую окружность и описанный около меньшей окружности. Если зафиксировать R, d и точку A_1 на большей окружности, то такого совпадения можно добиться, изменяя радиус r (рис. 2, в).

Зададимся теперь вопросом: будут ли совпадать точки A_1 и A_4 , если в ситуации на рисунке 2, в изменить начальное положение точки A_1 ?

Пусть в начальном положении радиус $R_1 = O_1A_1$ образует с линией центров угол φ_1 и имеет угловую скорость $\dot{\varphi}_1$. Найдем угловую скорость радиуса R_4 . Если угловые скорости этих радиусов одинаковы, то точки A_1 и A_4 совпадают; если эти скорости не равны, то точки A_1 и A_4 в процессе вращения радиуса O_1A_1 разойдутся.

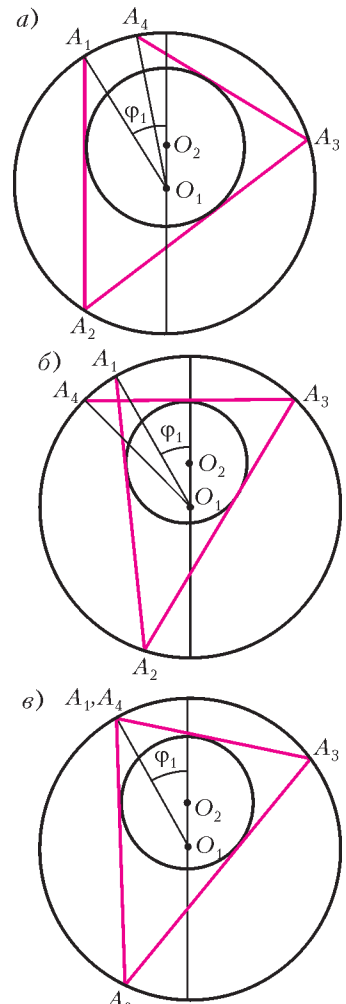


Рис. 2

При решении этой задачи мы будем использовать методы кинематики сложного движения точки и кинематики плоскопараллельного движения твердого тела (см. «Квант» №6 за 2003 г. и №1 за 2005 г.).

Напомним кратко, что сложное движение точки это ее движение относительно двух систем отсчета, одна из которых считается неподвижной, а другая – подвижной. Тогда движение точки относительно неподвижной системы отсчета называется ее абсолютным движением, а относительно подвижной системы отсчета – относительным движением. Соответственно, скорость точки при абсолютном движении называется ее абсолютной скоростью, а скорость точки при относительном движении называется ее относительной скоростью.

Более сложно понятие переносного движения и переносной скорости. Переносным движением точки называется движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной, переносной скоростью точки – скорость относительно неподвижной системы отсчета того пункта подвижной системы отсчета, с которым в данный момент совпадает движущаяся точка.

Пример. Теплоход плывет по реке, а по палубе идет человек. Пусть неподвижная система отсчета связана с берегами реки, а подвижная – с теплоходом. Тогда движение человека относительно теплохода является его относительным движением, а относительно берегов – абсолютным. Переносным движением человека является движение теплохода относительно берегов. Соответственно: абсолютная скорость человека – это его скорость относительно берегов, относительная – его скорость относительно теплохода, а переносная – это скорость относительно берегов той точки палубы, в которой в данный момент времени находится человек.

Также кратко напомним некоторые сведения из теории плоского (плоскопараллельного) движения твердого тела. Пусть плоская фигура движется в плоскости, которая ее содержит. Тогда оказывается, что при любом непостоянном движении этой фигуры (когда ее угловая скорость ω не равна нулю) она содержит такую точку P , скорость которой в данный момент времени равна нулю: $\vec{V}_P = \vec{0}$. Эта точка называется мгновенным центром скоростей данной фигуры (иначе – мгновенным центром вращений).

Пример. Колесо катится по рельсу без проскальзывания; в этом случае точка касания колеса и рельса – мгновенный центр скоростей колеса. При этом скорости точек этой плоской фигуры таковы, как будто фигура вращается вокруг неподвижной точки, совпадающей с мгновенным центром скоростей P . Так, скорость \vec{V}_A некоторой точки A равна по модулю $PA \cdot \omega$ и перпендикулярна отрезку PA : $\vec{V}_A \perp \vec{PA}$.

Пусть отрезок A_1A_2 лежит на прямой L_1L_2 (рис.3). Пусть теперь прямая L_1L_2 обкатывает окружность радиуса r без проскальзывания в точке касания B_1 . Точки A_1 и A_2 участвуют в сложном движении: они переносятся этой прямой и движутся по этой прямой. В результате сложения этих движений каждая из точек A_1 и A_2 движется по окружности радиуса R .

Рассмотрим движение точки A_1 . Пусть угловая скорость прямой L_1L_2 (стороны $a_1 = A_1A_2$ треугольника, лежащей на прямой L_1L_2) равна ω_L . Тогда $\omega_L = \omega_{a_1} = \dot{\phi}_{a_1}$. Так как прямая L_1L_2 не проскальзывает по окружности радиуса r , скорость точки B_1 (точки касания) равна нулю и поэтому она является мгновенным

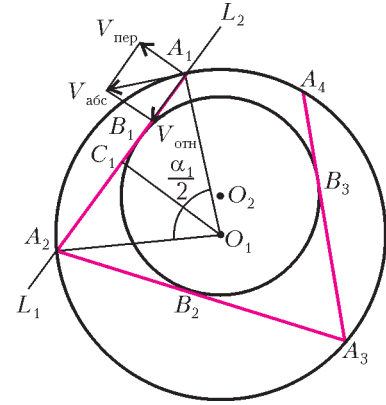


Рис. 3

центром скоростей этой прямой. Поэтому переносная скорость $\vec{V}_{пер}$ точки A_1 перпендикулярна отрезку $B_1A_1 = b_1$ и равна $V_{пер} = \omega_L B_1A_1 = \dot{\phi}_{a_1} b_1$.

Вектор \vec{V}_{A_1} абсолютной скорости точки A_1 направлен по касательной к большей окружности и по модулю равен $V_{A_1} = V_{абс} = \omega_1 R = \dot{\phi}_1 R$ (здесь $\omega_1 = \dot{\phi}_1$ – угловая скорость радиуса O_1A_1).

Относительная скорость $\vec{V}_{отн}$ точки A_1 направлена по прямой L_1L_2 ; ее величина нас не интересует.

По теореме о сложении скоростей имеем равенство $\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн}$. На рисунке 3 эта сумма построена. Видно, что

$$V_{пер} = V_{абс} \sin \angle(\vec{V}_{отн}, \vec{V}_{абс}) = V_{абс} \sin \frac{\alpha_1}{2}$$

(здесь α_1 – угол между радиусами O_1A_1 и O_1A_2). Подставляя сюда указанные выше значения $V_{пер}$ и $V_{абс}$, получим $\dot{\phi}_{a_1} b_1 = \dot{\phi}_1 R \sin \frac{\alpha_1}{2}$. Но $R \sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{a_1}{2}$, и поэтому

$$\dot{\phi}_{a_1} b_1 = \dot{\phi}_1 \frac{a_1}{2}. \quad (1)$$

Рассмотрим аналогичным образом движение точки A_2 как точки той же стороны a_1 и получим

$$\dot{\phi}_{a_1} b_2 = \dot{\phi}_2 \frac{a_1}{2} \quad (\text{здесь } b_2 = B_1A_2). \quad (2)$$

Точно таким же образом получим аналогичные соотношения для угловых скоростей сторон a_2 и a_3 и радиусов O_1A_3 и O_1A_4 . Сторона a_2 состоит из двух отрезков касательных к малой окружности:

$$a_2 = A_2A_3 = A_2B_2 + B_2A_3.$$

Но $A_2B_2 = A_2B_1 = b_2$. Поэтому

$$a_2 = b_2 + b_3 \quad (b_3 = B_2A_3).$$

Аналогично,

$$a_3 = A_3A_4 = b_3 + b_4 \quad (b_4 = B_3A_4).$$

Для стороны A_2A_3 получим равенства:

$$\dot{\phi}_{a_2} b_2 = \dot{\phi}_2 \frac{a_2}{2} \quad (3)$$

и

$$\dot{\phi}_{a_2} b_3 = \dot{\phi}_3 \frac{a_2}{2}. \quad (4)$$

Для стороны A_3A_4 получим равенства

$$\dot{\varphi}_{a_3} b_3 = \dot{\varphi}_3 \frac{a_3}{2} \quad (5)$$

и

$$\dot{\varphi}_{a_3} b_4 = \dot{\varphi}_4 \frac{a_3}{2}. \quad (6)$$

Уравнения (1) – (6) можно записать одной строкой:

$$\frac{2\dot{\varphi}_{a_1}}{a_1} = \frac{2\dot{\varphi}_{a_2}}{a_2} = \frac{2\dot{\varphi}_{a_3}}{a_3} = \frac{\dot{\varphi}_1}{b_1} = \frac{\dot{\varphi}_2}{b_2} = \frac{\dot{\varphi}_3}{b_3} = \frac{\dot{\varphi}_4}{b_4}. \quad (7)$$

Из равенства $\frac{\dot{\varphi}_1}{b_1} = \frac{\dot{\varphi}_4}{b_4}$ следует, что если ломаная оказалась замкнутой, то $b_1 = b_4$, а потому угловые скорости $\dot{\varphi}_4$ и $\dot{\varphi}_1$ равны. Отсюда следует, что при движении по описанной окружности вершины A_1 замкнутой ломаной (треугольника) ее замкнутость сохраняется.

Если треугольник (и вообще многоугольник) движется между двумя окружностями так, что он описан около одной окружности и вписан в другую окружность, то будем называть такое его движение скольжением между двумя окружностями (или просто скольжением), про каждую его вершину и сторону будем говорить, что они скользят вдоль соответствующей окружности. Такой треугольник (многоугольник) будем называть треугольником (многоугольником) Эйлера.

Многоугольник и две окружности

Точно таким же образом, как это мы сделали для треугольника, можно доказать, что если n -угольник (замкнутая ломаная) одновременно вписан и описан, то при скольжении одной из его вершин по описанной окружности остальные его вершины будут скользить по той же окружности, а его стороны – по вписанной в него окружности.

Необходимая для этого замкнутость ломаной $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ обеспечивается равенством угловых скоростей радиусов O_1A_1 и O_1A_{n+1} : $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_{n+1}$.

При скольжении многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ меняются величины его углов и длины сторон, но некоторые свойства неизменны. О таких свойствах речь пойдет дальше. Пока же заметим, что для него сохраняется равенство (7), которое кратко можно записать так:

$$\frac{2\dot{\varphi}_{a_k}}{a_k} = \frac{\dot{\varphi}_k}{b_k} = c \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Словами это можно сформулировать так: отношения $\frac{2\dot{\varphi}_{a_k}}{a_k}$ и $\frac{\dot{\varphi}_k}{b_k}$ равны и не зависят от индекса k .

Дальнейшие результаты будут основаны на следующем «руководящем принципе»:

Поскольку при скольжении многоугольника остаются неизменными R , r и d , то можно найти соотношение между этими величинами, переместив данный многоугольник в такое положение, в котором это соотношение находится сравнительно просто, а именно, в такое положение, когда многоугольник симметричен относительно линии центров O_1O_2 .

Прежде чем находить соотношения между R , r и d в конкретных случаях, получим одно важное равенство. Рассмотрим рисунок 4. На нем изображен элемент многоугольника, содержащий сторону $a_1 = A_1A_2$, радиусы O_1A_1 и O_1A_2 и радиус $r = O_2B_1$, проведенный в точку касания стороны a_1 и вписанной окружности.

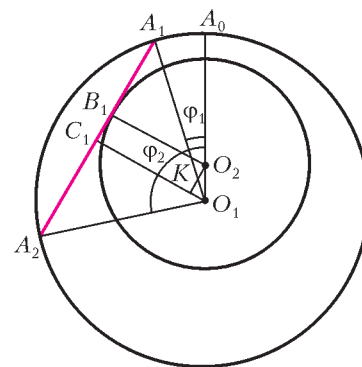


Рис. 4

Пусть угол между радиусом O_1A_1 и линией центров O_1A_0 равен φ_1 , а угол между радиусом O_1A_2 и линией центров O_1A_0 равен φ_2 . Тогда угол α_1 между радиусами O_1A_1 и O_1A_2 равен разности этих углов: $\alpha_1 = \angle A_2O_1A_1 = \varphi_2 - \varphi_1$. Высота треугольника $A_2O_1A_1$ – отрезок O_1C_1 – является в то же время биссектрисой угла при вершине O_1 , поэтому

$$\angle A_2O_1C_1 = \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2},$$

и

$$\angle C_1O_1A_0 = \angle C_1O_1A_1 + \angle A_1O_1A_0 = \frac{\alpha_1}{2} + \varphi_1 = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}.$$

Эта высота складывается из двух отрезков:

$$O_1C_1 = O_1K + KC_1 = d \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + r$$

(здесь точка K – проекция точки O_2 на прямую O_1C_1). Но верно и такое равенство:

$$O_1C_1 = O_1A_2 \cos \frac{\alpha_1}{2} = R \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}.$$

Итак, имеем

$$R \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = r + d \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}. \quad (9)$$

Разделили обе части на R :

$$\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{r}{R} + \frac{d}{R} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}.$$

Учитывая обозначения $\frac{r}{R} = \rho$, $\frac{d}{R} = \delta$, получим такую формулу:

$$\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \rho + \delta \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}. \quad (10)$$

Такое же равенство выполняется для любого аналогичного элемента многоугольника, т.е.

$$\cos \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} = \rho + \delta \cos \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Эта формула верна как для замкнутой ломаной, так и для незамкнутой. Если ломаная замкнута, точка A_{n+1} совпадает с точкой A_1 и выполняется равенство $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 360^\circ$.

Начнем теперь вычисление ρ и δ в конкретных случаях.

Вычисление для треугольника Эйлера

Мы получим формулу Эйлера для равнобедренного треугольника; как было сказано ранее в «руководящем принципе», она будет верна для произвольного треугольника.

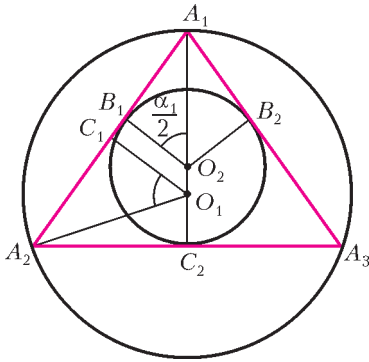


Рис. 5

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{O_2 B_1}{O_2 A_1} = \frac{r}{R-d} = \frac{\rho}{1-\delta}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos \angle A_2 O_1 A_1 = -\cos \angle C_2 O_1 A_2 = \\ &= -\frac{O_1 C_2}{O_1 A_2} = -\frac{r-d}{R} = -(\rho-\delta). \end{aligned}$$

Поскольку $\cos \alpha_1 = 2 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} - 1$, то

$$-(\rho-\delta) = 2 \frac{\rho^2}{(1-\delta)^2} - 1.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение

$$2\rho^2 + \rho(1-\delta)^2 - (1-\delta)^2(1+\delta) = 0.$$

Положительный корень этого уравнения такой:

$$\rho = 0,5(1-\delta^2),$$

откуда

$$r = 0,5 \frac{R^2 - d^2}{R}. \tag{12}$$

Тем самым, мы получили известное соотношение между величинами R , r и d , а именно формулу Эйлера для треугольника.

Вычисление для четырехугольника Эйлера

На рисунке 6 изображен вписанный и описанный четырехугольник, симметричный относительно линии центров $O_1 O_2$ (дельтоид).

В этом случае

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{O_2 B_1}{O_2 A_1} = \frac{r}{R-d} = \frac{\rho}{1-\delta},$$

а

$$\cos \frac{\alpha_2}{2} = \frac{O_2 B_2}{O_2 A_3} = \frac{r}{R+d} = \frac{\rho}{1+\delta}.$$

Кроме того, $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ$, т.е. $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = 90^\circ$, а по-

этому

$$\cos^2 \frac{\alpha_1}{2} + \cos^2 \frac{\alpha_2}{2} = 1,$$

или

$$\frac{\rho^2}{(1-\delta)^2} + \frac{\rho^2}{(1+\delta)^2} = 1. \tag{13}$$

$$\text{Отсюда } \rho^2 = \frac{1(1-\delta^2)^2}{2(1+\delta^2)},$$

и

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1-\delta^2}{\sqrt{1+\delta^2}},$$

или

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{R^2 - d^2}{\sqrt{R^2 + d^2}}. \tag{14}$$

Эту формулу, аналогичную формуле (12) для треугольника, будем называть формулой Эйлера для четырехугольника.

Вычисление для пятиугольника Эйлера

В этом случае нахождение нужной нам зависимости существенно сложнее, чем в предыдущих. В общем случае оно сводится к решению некоторого кубического уравнения.

Рассмотрим пятиугольник Эйлера, симметричный (согласно «руководящему принципу») относительно линии центров $O_1 O_2$ (рис.7).

Для решения задачи воспользуемся двумя первыми равенствами из (11), т.е. при $k = 1$ и $k = 2$. Так как в нашем случае $\varphi_1 = 0$ и (поэтому) $\varphi_2 = \alpha_1$, первое равенство (при $k = 1$) записывается так:

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\rho}{1-\delta},$$

а второе равенство (при $k = 2$) запишется так:

$$\cos \frac{\varphi_3 - \alpha_1}{2} = \rho + \delta \cos \frac{\varphi_3 + \alpha_1}{2}.$$

Второе равенство можно привести к виду

$$(1-\delta) \cos \frac{\varphi_3}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2} + (1+\delta) \sin \frac{\varphi_3}{2} \sin \frac{\alpha_1}{2} = \rho. \tag{15}$$

Третье уравнение получается из рассмотрения рисунка 7:

$$\cos \varphi_3 = \cos \left(180^\circ - \frac{\alpha_3}{2} \right) = -\cos \frac{\alpha_3}{2} =$$

$$= -\frac{O_1 B_3}{O_1 A_3} = -\frac{r-d}{R} = -(\rho-\delta) = \delta - \rho.$$

Дальнейшие преобразования таковы. Подставим в уравнение (15) значения тригонометрических

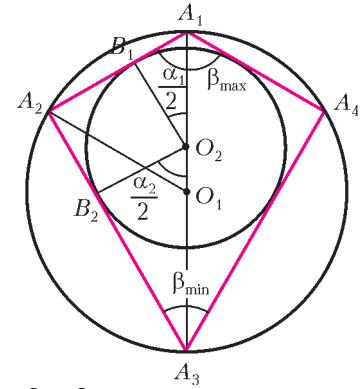


Рис. 6

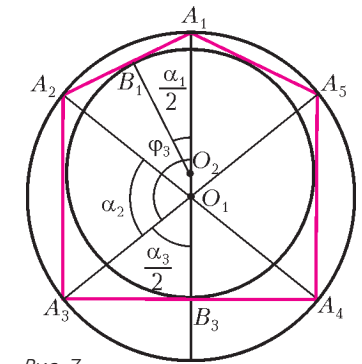


Рис. 7

функций:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varphi_3}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi_3}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \delta - \rho}{2}}, \\ \sin \frac{\varphi_3}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi_3}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \delta + \rho}{2}}, \\ \sin \frac{\alpha_1}{2} &= \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha_1}{2}} = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{(1 - \delta)^2}} = \frac{\sqrt{(1 - \delta)^2 - \rho^2}}{1 - \delta} \end{aligned}$$

и получим

$$\rho \sqrt{\frac{1 + \delta - \rho}{2}} + \frac{1 + \delta}{1 - \delta} (1 - \delta + \rho) \sqrt{\frac{1 - \delta - \rho}{2}} = \rho.$$

После избавления от иррациональностей и несложных преобразований приходим к уравнению третьей степени относительно ρ :

$$\rho^3 \cdot 8\delta^2 + 4\rho^2 \cdot (1 - \delta^2) - 2\rho \cdot (1 - \delta^2)^2 + (1 - \delta^2)^3 = 0.$$

Это уравнение упрощается, если ввести новую переменную $y = \frac{1 - \delta^2}{2\rho}$. Относительно этой переменной приходим к уравнению

$$y^3 + y^2 - y - \delta^2 = 0. \tag{16}$$

Истинность этого уравнения можно проверить для случая правильного пятиугольника, когда $\delta = 0$. Вы можете проделать это самостоятельно.

Полученное уравнение можно исследовать графически, а также решить по формуле Кардано или используя тригонометрию. И это тоже вы можете проделать самостоятельно.

Вычисление для шестиугольника Эйлера

Рассмотрим шестиугольник Эйлера, симметричный (согласно «руководящему принципу») относительно линии центров O_1O_2 (рис.8).

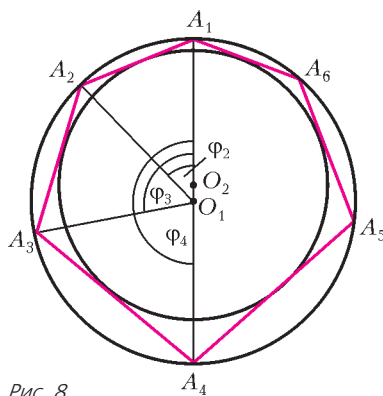


Рис. 8

Воспользуемся первыми тремя равенствами из (11), т.е. при $k = 1, k = 2$ и $k = 3$.

Так как $\varphi_1 = 0$ и (поэтому) $\varphi_2 = \alpha_1$, первое равенство запишется так:

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\rho}{1 - \delta}, \tag{17}$$

а второе – так:

$$(1 - \delta) \cos \frac{\varphi_3}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2} + (1 + \delta) \sin \frac{\varphi_3}{2} \sin \frac{\alpha_1}{2} = \rho. \tag{18}$$

Третье же равенство

$$\cos \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2} = \rho + \delta \cos \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2}$$

(поскольку $\varphi_4 = 180^\circ$) приводится к виду

$$\sin \frac{\varphi_3}{2} = \frac{\rho}{1 + \delta}. \tag{19}$$

Подставив (17) и (19) в (18), получим:

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} + \cos \frac{\varphi_3}{2} = 1, \tag{20}$$

или

$$\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{(1 - \delta)^2}} + \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{(1 + \delta)^2}} = 1. \tag{21}$$

Эта формула симпатична, а попытка найти явную зависимость между ρ и δ приводит к такому, увы, некрасивому выражению:

$$\rho = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1 - \delta^2}{\sqrt{1 + \delta^2} + \sqrt{(1 + \delta^2)^2 + 12\delta^2}}.$$

Для многоугольников Эйлера с числом сторон, большим 6, можно получить уравнения, связывающие значения ρ и δ в неявном виде. Получение явной зависимости между ними связано с громоздкими и вряд ли преодолимыми преобразованиями.

Потому мы и ограничиваемся получением формулы Эйлера только для трех-, четырех-, пяти- и шестиугольников Эйлера.

Задачи

Задача 1. Центр описанной около треугольника окружности лежит на вписанной окружности. Вычислите отношение радиусов этих окружностей.

Решение. Расположим треугольник так, чтобы одна из его сторон касалась вписанной в него окружности в центре описанной окружности O_1 (рис.9). Тогда эта сторона будет диаметром описанной окружности, а сам треугольник – прямоугольным и равнобедренным. Поэтому

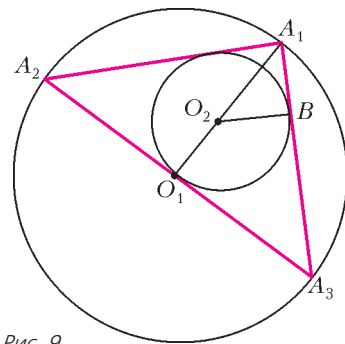


Рис. 9

$$R = O_1A_1 = O_1O_2 + O_2A_1 = r + r\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2}).$$

Отсюда получаем

$$\rho = \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1.$$

Задача 2. Отношение расстояния между центрами вписанной в треугольник окружности и описанной около треугольника окружности к радиусу последней равно $\frac{d}{R} = \delta$. В каких границах лежат углы этого треугольника?

Решение. Оценим один из углов данного треугольника $A_1A_2A_3$ – пусть это будет угол при вершине A_1 , который мы обозначим как α (рис.10,а). Тогда $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{l}$, где r – радиус вписанной окружности, а $l = O_2A_1$. При скольжении треугольника значение l

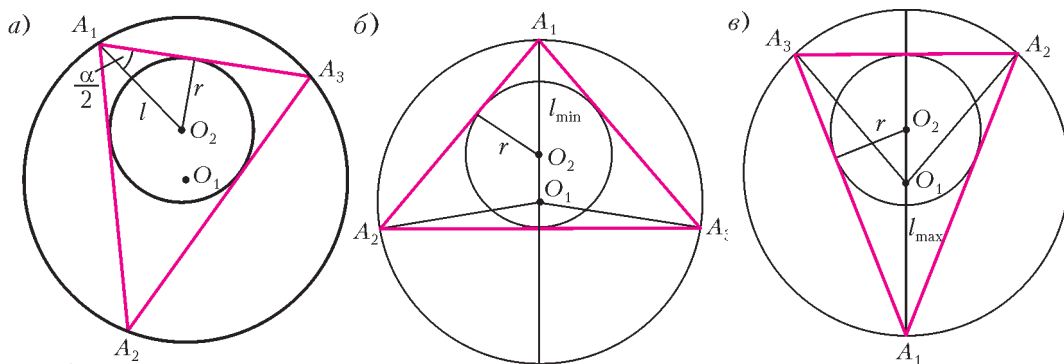


Рис. 10

меняется от наименьшего значения $l_{\min} = R - d$ (рис. 10, б) до наибольшего значения $l_{\max} = R + d$ (рис. 10, в). Поэтому $\sin \frac{\alpha_{\max}}{2} = \frac{r}{l_{\min}} = \frac{r}{R - d} = \frac{\rho}{1 - \delta}$ и $\sin \frac{\alpha_{\min}}{2} = \frac{r}{l_{\max}} = \frac{r}{R + d} = \frac{\rho}{1 + \delta}$. Так как $\rho = \frac{1 - \delta^2}{2}$, то $\sin \frac{\alpha_{\max}}{2} = \frac{1 + \delta}{2}$ и $\sin \frac{\alpha_{\min}}{2} = \frac{1 - \delta}{2}$.

Отсюда ответ: $2 \arcsin \frac{1 - \delta}{2} \leq \alpha \leq 2 \arcsin \frac{1 + \delta}{2}$.

Замечание 1. Если помимо значения δ задано также значение ρ , то эта задача имеет и другое простое решение – найдите его. При этом получается более красивый ответ:

$$\arccos(\rho + \delta) \leq \alpha \leq \arccos(\rho - \delta).$$

Замечание 2. Оценив один из углов треугольника, мы тем самым оценили любой угол скользящего треугольника.

Теперь рассмотрим аналогичные задачи для четырехугольника.

Задача 3. Окружность, вписанная в четырехугольник Эйлера, проходит через центр описанной около него окружности. Чему равно отношение радиусов этих окружностей?

Эту задачу вы сможете сделать самостоятельно.

Ответ: $\rho = \delta = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

Задача 4. Отношение расстояния между центрами вписанной в четырехугольник окружности и описанной около четырехугольника окружности к радиусу последней равно $\frac{d}{R} = \delta$. В каких границах лежат углы этого четырехугольника?

Решение. На рисунке 6 четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ симметричен относительно линии центров O_1O_2 . Вершина скользящего четырехугольника Эйлера поочередно занимает положение A_1, A_2, A_3 и A_4 . Как и при скольжении треугольника (задача 2), угол при вершине четырехугольника достигает максимального значения β_{\max} , когда расстояние от центра вписанной окружности до этой вершины минимально и равно $R - d$ (в вершине A_1), а минимального значения β_{\min} – когда это расстояние максимально и равно $R + d$ (в вершине A_3).

Очевидно, что

$$\sin \frac{\beta_{\min}}{2} = \cos \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\rho}{1 + \delta},$$

а

$$\cos \frac{\beta_{\min}}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\rho}{1 - \delta}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sin \beta_{\min} &= \\ &= 2 \sin \frac{\beta_{\min}}{2} \cos \frac{\beta_{\min}}{2} = \\ &= \frac{2\rho^2}{1 - \delta^2}. \end{aligned}$$

Подставим сюда значение ρ^2 из формулы (14) и получим $\sin \beta_{\min} = \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}$. Поскольку $\beta_{\min} + \beta_{\max} = 180^\circ$, то

$$\arcsin \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2} \leq \beta \leq 180^\circ - \arcsin \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}.$$

Задача 5. Вершины A_1 и A_4 шестиугольника Эйлера $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ лежат на линии центров O_1O_2 (см. рис. 8). Радиус описанной окружности равен R . Докажите, что $a_1 + a_3 = 2R$ ($a_1 = A_1A_2$, $a_3 = A_3A_4$).

Решение. Имеем такие равенства:

$$a_1 = 2R \sin \frac{\varphi_2}{2} = 2R \sin \frac{\alpha_1}{2},$$

$$a_3 = 2R \sin \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2} = 2R \sin \frac{180^\circ - \varphi_3}{2} = 2R \cos \frac{\varphi_3}{2}.$$

Отсюда получаем, учитывая уравнение (20),

$$a_1 + a_3 = 2R \left(\sin \frac{\alpha_1}{2} + \cos \frac{\varphi_3}{2} \right) = 2R.$$

Задача 6. Пусть известны центральные углы α_k , под которыми стороны многоугольника Эйлера видны из центра описанной окружности. Чему равно отношение радиусов вписанной и описанной окружностей?

Решение. Умножим каждое из равенств (11) на $\sin \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2}$ и сложим полученные равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} \cos \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} &= \\ &= \rho \sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} + \delta \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} \cos \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}. \end{aligned}$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin (\varphi_{k+1} - \varphi_k) &= \\ &= \rho \sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} + \frac{1}{2} \delta \sum_{k=1}^n (\sin \varphi_{k+1} - \sin \varphi_k). \end{aligned}$$

Но $\sum_{k=1}^n (\sin \varphi_{k+1} - \sin \varphi_k) = 0$ (учитывая, что $\varphi_{n+1} =$

= 360° + φ₁). И так как φ_{k+1} - φ_k = α_k, получим

$$\rho = \frac{\sum_{k=1}^n \sin \alpha_k}{2 \sum_{k=1}^n \sin \frac{\alpha_k}{2}}. \quad (22)$$

Замечание. Если многоугольник Эйлера является треугольником с углами α, β, γ, то формула (22) выглядит так:

$$\rho = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)}. \quad (23)$$

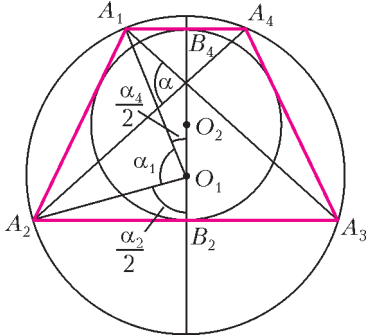


Рис. 11

Задача 7. Четырехугольник Эйлера является трапецией (рис. 11). Зная δ, найдите угол α между ее диагоналями.

Решение. Ясно, что трапеция A1A2A3A4 – равнобокая. Угол α равен полусумме дуг, которые высекают на описанной окружности диагонали A1A3 и A2A4, т.е. α = 0,5(α1 + α3). Так как у трапеции α1 = α3, то α = α1. Очевидно выполнение равенства

$$\alpha = \alpha_1 = 180^\circ - \frac{\alpha_4 + \alpha_2}{2},$$

где $\frac{\alpha_4}{2} = \angle A_1 O_1 B_4$, $\frac{\alpha_2}{2} = \angle A_2 O_1 B_2$. Найдем

$$\cos \frac{\alpha_4 + \alpha_2}{2} = \cos \frac{\alpha_4}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2} - \sin \frac{\alpha_4}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2}.$$

Из рисунка 11 следует

$$\cos \frac{\alpha_4}{2} = \frac{O_1 B_4}{O_1 A_1} = \frac{r + d}{R} = \rho + \delta,$$

$$\cos \frac{\alpha_2}{2} = \frac{O_1 B_2}{O_1 A_2} = \frac{r - d}{R} = \rho - \delta,$$

а потому

$$\cos \frac{\alpha_4}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2} = \rho^2 - \delta^2.$$

Найдем теперь $\sin \frac{\alpha_4}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2}$:

$$\sin \frac{\alpha_4}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{1 - (\rho + \delta)^2} \sqrt{1 - (\rho - \delta)^2} = \rho^2.$$

Тогда

$$\cos \left(\frac{\alpha_4}{2} + \frac{\alpha_2}{2} \right) = -\delta^2.$$

Окончательно получаем: $\cos \alpha = \delta^2$, и $\alpha = \arccos \delta^2$.

Задача 8. Четырехугольник Эйлера при скольжении становится в некоторые моменты времени трапецией (рис.12,а) или дельтоидом (рис.12,б). В каком случае его периметр меньше?

Решение. Пусть в трапеции A1A2A3A4 A1A2 = a1, A2A3 = a2, A3A4 = a3, A4A1 = a4. Поскольку трапе-

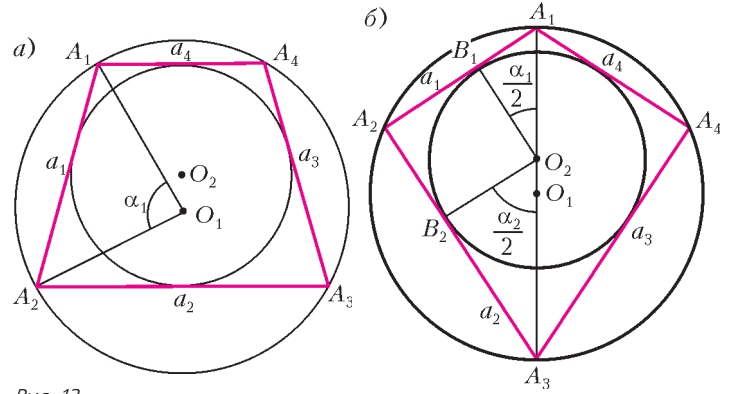


Рис. 12

ция описана около окружности, суммы пар ее противоположных сторон равны: a1 + a3 = a2 + a4. Поэтому периметр P равен 2(a1 + a3). Но a1 = a3, и потому периметр P равен 4a1. Так как трапеция вписана в окружность, то a1 = 2R sin $\frac{\alpha_1}{2}$. В предыдущей задаче мы получили равенство $\cos \alpha = \cos \alpha_1 = \delta^2$. Поэтому

$$a_1 = 2R \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha_1}{2}} = \sqrt{2} R \sqrt{1 - \delta^2},$$

и

$$P = 4\sqrt{2} R \sqrt{1 - \delta^2}.$$

В дельтоиде A1A2A3A4 A1A2 = a1, A2A3 = a2, A3A4 = a3, A4A1 = a4. Его периметр равен

$$\begin{aligned} P_1 &= 2(a_1 + a_3) = 2(a_1 + a_2) = \\ &= 2 \left(2R \sin \frac{\alpha_1}{2} + 2R \sin \frac{\alpha_2}{2} \right) = 4R \left(\sin \frac{\alpha_1}{2} + \sin \frac{\alpha_2}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = 90^\circ$, то

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} = \cos \frac{\alpha_2}{2} = \frac{O_2 B_2}{O_2 A_3} = \frac{r}{R + d} = \frac{\rho}{1 + \delta},$$

$$\sin \frac{\alpha_2}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{O_2 B_1}{O_2 A_1} = \frac{r}{R - d} = \frac{\rho}{1 - \delta}.$$

Тогда

$$P_1 = 4R \left(\frac{\rho}{1 + \delta} + \frac{\rho}{1 - \delta} \right) = \frac{8R\rho}{1 - \delta^2}.$$

Подставим в это равенство $\rho = \frac{1 - \delta^2}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \delta^2}}$ и получим

$$P_1 = \frac{4\sqrt{2}R}{\sqrt{1 + \delta^2}}.$$

Чтобы выяснить, какой из найденных периметров меньше, найдем отношение периметра трапеции к периметру дельтоида. Оно равно $\sqrt{1 - \delta^4} < 1$. Получается, что периметр трапеции меньше периметра дельтоида.

(Окончание следует)

Вверх и вниз через атмосферу

К. БОГДАНОВ

Можно ли улететь в космос на воздушном шаре?

В течение многих лет этот вопрос волновал известного русского ученого и изобретателя в области аэро- и ракетодинамики К.Э. Циолковского. Сначала он пытался обосновать возможность, а потом – невозможность таких полетов. И только в 1903 году ученый дал окончательный отрицательный ответ в ставшей классической работе «Исследование мировых пространств реактивными приборами».

Рассчитывая необходимые размеры шара массой 1 кг, наполненного водородом, который мог бы поднять 1 кг полезного груза на высоту 27 км, Циолковский пришел к заключению, что «...даже папиросная бумага будет в 5 раз тяжелее той материи, которая должна быть употреблена на наш аэростат. Такая материя, в применении к аэростату, невозможна, потому что оболочка, сделанная из нее, будет рваться и сильно пропускать газ». И далее: «Что же сказать о поднятии приборов на большую высоту? Размеры аэростатов должны быть еще значительно больше, но не надо при этом забывать, что с увеличением размеров воздушного шара разрывающие оболочку силы все более и более берут перевес над сопротивлением материала. За пределы атмосферы поднятие приборов, с помощью воздушного шара, разумеется, совсем немислимо...»

Итак, по мнению Циолковского, полет аэростатов в космос невозможен хотя бы только из-за отсутствия достаточно тонких и прочных материалов для оболочек аэростатов.

Прошло более ста лет, и сейчас создано довольно много материалов, о которых Циолковский не мог и мечтать. Так, использование полиэтиленовой пленки толщиной 3,4 мкм дало возможность японским ученым из Института космических исследований изготовить стратостат объемом 60000 м^3 (диаметром 50 м), масса которого составила всего 35 кг. В мае 2002 года этот стратостат установил рекорд, поднявшись на высоту 53 км с полезным грузом около 5 кг, состоящим из двух телевизионных камер и прибора для определения высоты. График рекордного подъема этого стратостата изображен на рисунке 1.

Таким образом, развитие технологий показало, что пророчество Циолковского в отношении воздушных шаров, вообще говоря, оказалось не совсем верным. Ведь на высоте 53 км плотность атмосферы составляет меньше $1/1000$ от ее плотности на уровне моря,

поэтому можно считать, что с помощью воздушных шаров приборы за пределы атмосферы все-таки подняли! Так, может быть, вообще не существует верхнего предела для высоты, на которую может подняться стратостат? Попробуем ответить на этот вопрос.

Оцениваем энергию опускающегося атмосферного столба

Аэростат движется вверх, поскольку снизу на него действует выталкивающая сила Архимеда со стороны окружающего воздуха. Поднимаясь, аэростат освобождает под собой место, которое занимает воздух, вытесненный аэростатом сверху. Потенциальная энергия этого движущегося сверху вниз воздуха уменьшается, и часть этой энергии переходит в механическую энергию стратостата. Если M_a – масса перемещающегося атмосферного воздуха, а H – характерная высота стратостата, то максимальная энергия, которая может быть передана стратостату от опускающегося воздуха,



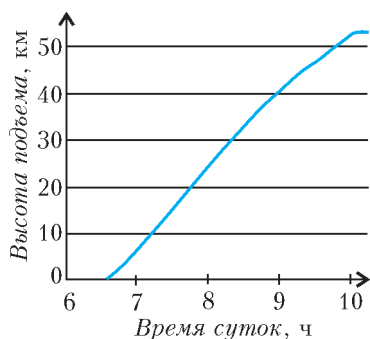


Рис.1. Рекордный подъем в воздух японского стратостата 22 мая 2002 года

уровне моря, $b = 0,00013 \text{ м}^{-1}$ — константа, связанная с плотностью ρ_0 , ускорением

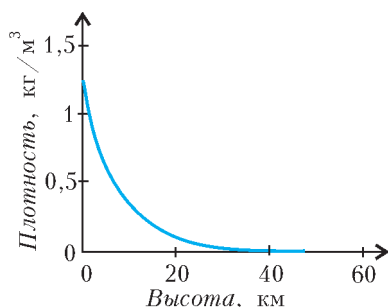


Рис.2. Изменение плотности атмосферы с высотой

свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ и атмосферным давлением у поверхности земли $p_a = 101 \text{ кПа}$ соотношением $b = \rho_0 g / p_a$. Если максимальная площадь поперечного сечения стратостата в горизонтальной плоскости равна S , то, интегрируя выражение для плотности ρ , легко найти массу перемещающегося сверху вниз атмосферного воздуха:

$$M_a = \frac{\rho_0}{b} S.$$

Подставляя эту массу в формулу для максимальной энергии, получаем

$$W_{\max} = \frac{\rho_0 g}{b} S H = \frac{\rho_0 g}{b} V,$$

где V — объем стратостата.

Можно ли навсегда покинуть Землю на стратостате?

Сравним энергию опускающегося столба атмосферы W_{\max} с энергией W_{Π} , которую необходимо передать телу массой m , чтобы навсегда вывести его за пределы тяготения Земли, придав ему вторую космическую скорость $v_{\Pi} = 11,2 \text{ км/с}$. Можно показать, что

$$W_{\Pi} = mgR_3,$$

где $R_3 = 6400 \text{ км}$ — радиус Земли. Если считать, что вся энергия опускающегося столба атмосферы переходит в кинетическую энергию поднимающегося тела, то это тело, поднимаясь, может достичь второй космической скорости при условии

$$W_{\Pi} \leq W_{\max}, \text{ или } \frac{m}{V} \leq \frac{\rho_0}{bR_3} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3.$$

Это означает, что улететь далеко в космос, затратив только энергию атмосферы, мы сможем, когда научимся заполнять почти невесомые и очень прочные стратостаты... вакуумом. Например, если изготовить запол-

равна

$$W_{\max} = M_a g H.$$

Из справочника по физике можно узнать, что плотность ρ воздуха в атмосфере уменьшается с высотой h по экспоненциальному закону (рис.2)

$$\rho = \rho_0 e^{-bh},$$

где $\rho_0 = 1,23 \text{ кг/м}^3$ — плотность воздуха на высоте $h = 0$, $b = 0,00013 \text{ м}^{-1}$ — константа, связанная с плотностью ρ_0 , ускорением свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ и атмосферным давлением у поверхности земли $p_a = 101 \text{ кПа}$ соотношением $b = \rho_0 g / p_a$. Если максимальная площадь поперечного сечения стратостата в горизонтальной плоскости равна S , то, интегрируя выражение для плотности ρ , легко найти массу перемещающегося сверху вниз атмосферного воздуха:

ненный вакуумом стратостат массой 1 кг и объемом 1000 м^3 , то такой гипотетический стратостат в принципе мог бы улететь навсегда в космос при условии, что атмосфера не будет сопротивляться его движению.

Конечно, все это из области фантастики, но ведь и Циолковский сто лет тому назад тоже фантазировал.

Кончаем фантазировать и оцениваем максимально возможную высоту подъема стратостата

Известно, что оболочку стратостата на земле наполняют лишь частично, и вот почему. Если сразу полностью надуть стратостат гелием, придав ему шарообразную форму и увеличив до предела подъемную силу, то, поднявшись высоко, он может лопнуть, не выдержав разности давлений. Поэтому отрывающийся от земли стратостат похож на длинный сморщенный чулок, слегка расширяющийся кверху. Поднимаясь в разреженные слои атмосферы, стратостат постепенно расширяется и принимает форму, близкую к шарообразной. Оценим максимальную высоту подъема такого стратостата.

Стратостат перестанет двигаться вверх и достигнет максимальной высоты h_{\max} , когда сила Архимеда окажется равной силе тяжести. К этому времени стратостат раздуется полностью, его объем будет V_{\max} , а сила Архимеда станет равной

$$F_A = \rho_0 e^{-bh_{\max}} V_{\max} g.$$

Пусть масса оболочки и оборудования стратостата равна M , а масса гелия, которым был заполнен стратостат на земле при температуре $T_a = 293 \text{ К}$ и нормальном атмосферном давлении p_a , составляет $m_r = \rho_r V_{\min}$, где $\rho_r = 0,17 \text{ кг/м}^3$ — плотность гелия и V_{\min} — занимаемый им объем. Тогда сила тяжести стратостата будет равна

$$F_r = (M + m_r) g = Mg + \rho_r V_{\min} g.$$

Приравняв силы F_A и F_r , получаем следующее выражение для максимальной высоты подъема h_{\max} гелиевого стратостата:

$$h_{\max} = \frac{1}{b} \ln \frac{\rho_0 V_{\max}}{M + \rho_r V_{\min}}.$$

Из формулы для h_{\max} следует, что, чем меньше V_{\min} , тем выше поднимется стратостат. Однако уменьшать V_{\min} мы можем только до тех величин, при которых стратостат сумеет оторваться от земли. А именно, пока

$$\frac{V_{\min}}{M} > \frac{1}{\rho_0 - \rho_r}.$$

Величина в правой части полученного неравенства очень близка к единице. Таким образом, стратостат массой 40 кг (без газа) достаточно заполнить гелием в объеме 40 м^3 , и он медленно пойдет вверх. Но на самом деле V_{\min} должен быть на порядок больше расчетной величины, так как, заполняя стратостат, мы должны его расправить. Иначе, поднимаясь вверх, незаполненный шлейф стратостата может запутаться. Другими словами, гелий объемом V_{\min} должен ока-

заться в верхней части стратостата. Чтобы сделать так, сооружают специальную платформу, на которой и заполняют стратостат.

Будем считать, например, что $V_{\min} = V_{\max}/100$. Подставляя в выражение для максимальной высоты $M = 40$ кг, $V_{\max} = 60000$ м³, $V_{\min} = 600$ м³ (при этом $V_{\min}/M = 15$ м³/кг), получаем $h_{\max} \approx 48,2$ км.

Итак, наша оценка почти совпала с рекордной высотой подъема обсуждаемого японского стратостата.

А можно ли, заполнив тот же стратостат меньшим объемом гелия, добиться существенно большей высоты поднятия? Положив, например, $V_{\min} = 400$ м³ ($V_{\min}/M = 10$ м³/кг), получаем $h_{\max} \approx 50,3$ км, что всего на 2 км больше. Дальше уменьшать V_{\min} , очевидно, уже невозможно.

Однако, как следует из формулы для h_{\max} , чтобы поднять стратостат еще выше, мы можем не только уменьшать V_{\min} , но и увеличивать V_{\max} . Найдем зависимость h_{\max} от V_{\max} , считая, что $V_{\min}/M = 10$ м³/кг и стратостат не поднимает никакого полезного груза. Пусть полностью раздутый стратостат имеет форму шара радиусом R_{\max} . Тогда поверхность этого шара равна $4\pi R_{\max}^2$, а масса оболочки составляет $M = \rho_c \cdot 4\pi R_{\max}^2 d$, где ρ_c – плотность материала оболочки стратостата, а d – ее толщина. Разделив числитель и знаменатель дроби, от которой берется логарифм в формуле для h_{\max} , на M , получаем

$$h_{\max} = \frac{1}{b} \ln \frac{\rho_0 \frac{V_{\max}}{M}}{1 + \rho_r \frac{V_{\min}}{M}} = \frac{1}{b} \ln \frac{\rho_0 \frac{R_{\max}}{3\rho_c d}}{1 + \rho_r \frac{V_{\min}}{M}}$$

Зависимость h_{\max} от V_{\max} показана сплошной линией на рисунке 3 для стратостата, сделанного из полиэтиленовой пленки плотностью $\rho_c = 1000$ кг/м³ и толщиной $d = 3,4$ мкм при условии что $V_{\min}/M = 10$ м³/кг. Видно, что с ростом максимального объема стратостата увеличивается и максимальная высота его подъема, но в диапазоне от 60000 до 120000 м³ эта высота возрастает лишь на 1 км. В то же время, использование более тонкой пленки, например толщиной 2 мкм, дает увеличение высоты подъема почти на 5 км для стратостатов любых размеров (см. пунктирную линию на рисунке 3).

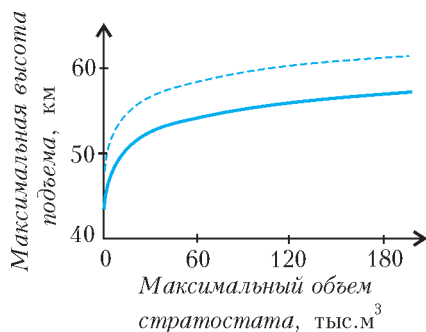


Рис.3. Теоретическая зависимость высоты подъема стратостата от его максимального объема

Оцениваем скорость подъема стратостата

Стратостат является незаменимым устройством для послышного изучения атмосферы, поскольку он поднимается вверх довольно медленно. Так, например, упомянутый японский стратостат до своей рекордной высоты поднимался более трех часов практически равномерно со скоростью около 260 м/мин (см. рис.1). От каких же параметров зависят скорость и время подъема стратостата, и можно ли их оценить теоретически?

На стратостат действуют три силы – сила Архимеда, сила сопротивления воздуха и сила тяжести. Сила Архимеда, толкающая вверх стратостат объемом V , находящийся на высоте h , равна

$$F_A = \rho V g = \rho_0 e^{-bh} V g.$$

Сила тяжести стратостата, заполненного гелием, была нами выведена ранее:

$$F_T = Mg + \rho_r V g.$$

Сила сопротивления воздуха, действующая на стратостат при его равномерном подъеме со скоростью v , равна

$$F_{\text{сопр}} = CS \frac{\rho v^2}{2},$$

где S – площадь поперечного сечения стратостата, а C – безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом аэродинамического сопротивления, который для шарообразной формы стратостата составляет 0,24. (Подробнее об аэродинамической силе, одной из составляющих которой является сила сопротивления, можно прочитать в книге А.Л.Стасенко «Физические основы полета» – вып.91 «Библиотечки «Квант».)

Заметим, однако, что воздух играет еще одну роль. При ускоренном движении стратостат вынужден придавать ускорение некоторой массе воздуха, находящегося перед ним, поэтому масса стратостата как бы увеличивается. Это увеличение массы называют присоединенной массой. Как показывают расчеты, при ускоренном подъеме шарообразного стратостата присоединенная масса равна половине массы воздуха в объеме, занимаемом стратостатом.

Итак, все силы, действующие на стратостат, описаны, но, перед тем как оценить скорость подъема, нам необходимо описать изменение формы и объема стратостата при подъеме.

Пусть верхняя часть стратостата всегда имеет форму полусферы радиусом r , равным радиусу поперечного сечения стратостата, а нижняя его часть представляет собой половину эллипсоида вращения с полуосями r и L (рис.4). При движении вверх, когда давление воздуха снаружи падает, объем стратостата увеличивается, площадь его поперечного сечения πr^2 растет, а вертикальный размер L уменьшается, приближаясь к r_{\max} . В конце концов стратостат принимает шарообразную форму с радиусом r_{\max} . Чтобы описать все промежуточные формы стратостата, можно считать, что для них справедливо следующее равенство:

$$r + L = 2r_{\max}.$$

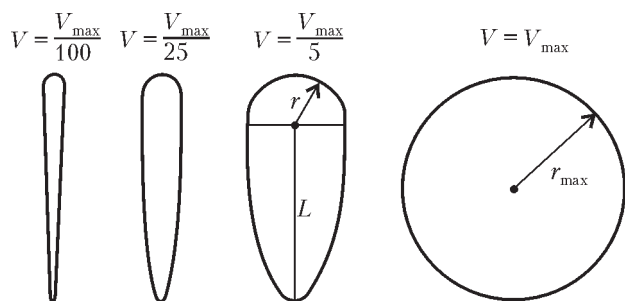


Рис.4. Изменение формы и объема модельного стратостата при подъеме

При этом объем стратостата равен

$$V = \frac{4}{3}\pi r^2 r_{\max} = \frac{4}{3}S r_{\max}.$$

Но пока оболочка стратостата не натянулась, его объем можно вычислить по уравнению Клапейрона–Менделеева, считая, что давление и температура гелия равны соответствующим параметрам воздуха снаружи. Легко показать, что при подъеме сила Архимеда, до тех пор пока оболочка стратостата не натянулась, остается неизменной и равной весу воздуха, вытесненного стратостатом у поверхности земли:

$$F_A = m_B g = \rho_B V_{\min} g = \frac{p_a M_B}{RT_a} V_{\min} g,$$

где $M_B = 29$ г/моль – молярная масса воздуха. Тогда объем стратостата достигает своего максимального значения V_{\max} на высоте

$$h_* = \frac{1}{b} \ln \frac{\rho_0 V_{\max} g}{F_A} = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{M_r}{M_B} \frac{\rho_0 V_{\max}}{\rho_r V_{\min}} \right).$$

Для японского стратостата с $V_{\min} = 300$ м³ высота h_* , вычисленная по этой формуле, составляет чуть более 40 км (точнее – 40,9 км). Таким образом, первые 40 км стратостат поднимался под действием *постоянной* силы Архимеда, после чего ее величина стала уменьшаться, так как объем стратостата уже не мог увеличиваться, и еще через 13 км сила Архимеда оказалась равной силе тяжести – стратостат остановился.

Определим скорость движения стратостата на участке подъема с постоянной силой Архимеда. Как уже говорилось, сила сопротивления воздуха зависит от произведения Sr , причем при всех изменениях формы и объема площадь поперечного сечения стратостата S связана с его объемом соотношением $S = (3/4)V/r_{\max}$. С учетом этого для силы сопротивления получаем

$$F_{\text{сопр}} = CS \frac{\rho v^2}{2} = \frac{3C}{8r_{\max}} \frac{\rho V}{RT} M_B v^2 = \frac{3C}{8r_{\max}} \frac{p_a V_{\min}}{RT_a} M_B v^2.$$

Отсюда следует, что множитель при v^2 изменяется с высотой так, как изменяется коэффициент C . Сначала аэростат имеет каплевидную форму, для которой коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха $C \approx 0,04$, а в конце приобретает шарообразную форму, для которой $C \approx 0,24$. Еще раз облегчим себе задачу, считая, что в среднем $C \approx 0,14$.

Попробуем сначала пренебречь присоединенной массой. Тогда из равенства $F_A = F_{\text{сопр}} + (M + m_r)g$ можно получить следующее выражение для скорости подъема

стратостата:

$$v = \sqrt{\frac{8gr_{\max}}{3C} \left(1 - \frac{M + m_r}{m_B} \right)},$$

где m_B – уже упоминавшаяся масса вытесненного стратостатом воздуха на земле. Для нашего «подопытного» стратостата с $r_{\max} = 25$ м, $C = 0,14$, $M = 40$ кг, $m_r = 68$ кг, $V_{\min} = 400$ м³, $m_B = 492$ кг последняя формула дает $v = 30,3$ м/с = 1818 м/мин, что в 7 раз больше реальной скорости, которую можно вычислить из данных, приведенных на рисунке 1. Значит, надо считать честно, т.е. учитывая присоединенную массу.

Считаем скорость подъема, учитывая присоединенную массу

Учесть эффект присоединенной массы M_{Π} довольно легко: достаточно в формулу для вычисления v подставить $M + M_{\Pi}$ вместо M . Но основную трудность представляет подбор формулы для вычисления самой присоединенной массы. Оказалось, что значение скорости подъема стратостата, получаемое с учетом M_{Π} , ближе всего соответствует данным рисунка 1, если считать, что присоединенная масса составляет 0,77 массы воздуха, вытесняемого стратостатом. Это значение не вызывает удивления, поскольку для шара оно должно быть 0,5, а для цилиндра, движущегося перпендикулярно своей оси, – 1,0.

Таким образом, на примере стратостата мы показали, что рассчитать движение тел малой плотности в средах большой плотности можно только в том случае, если учесть эффект присоединенной массы. Аналогично следует поступать при обсуждении движения пузырька воздуха, всплывающего в жидкости. А вот летящий в воздухе камень, хотя и вовлекает в движение некоторую массу воздуха перед собой, но плотность воздуха в тысячи раз меньше плотности камня, и поэтому эффект присоединенной массы в этом случае будет совсем незначительным.

А если прыгнуть из стратосферы на Землю?

Именно так сделал американец Дж.Киттенджер 16 августа 1960 года, спрыгнув со стратостата, поднявшегося на высоту 31 км. В течение первых 13 секунд он летел в свободном падении, потом открылся маленький стабилизирующий парашют диаметром 1,8 м, который лишь слегка замедлил свободное падение, но зато предотвратил смертельно опасное закручивание. Так он летел еще 4,5 минуты, опустившись до высоты 5,3 км, на которой уже раскрылся обычный парашют диаметром 8,5 м.

Когда свободное падение парашютиста происходит в высоких слоях атмосферы, где воздух сильно разрежен, его скорость может достигать очень больших значений. В этом полете скорость Киттенджера вплотную приблизилась к скорости звука и составила более 900 км/ч. Поэтому вход парашютиста в более плотные слои воздуха можно было рассматривать как столкновение, со всеми вытекающими отсюда последствиями. Так, Киттенджер, «ударившись» о плотные слои воз-

духа на высоте 23000 м, почувствовал перегрузки около $1,2g$. Этот прыжок до сих пор является неофициальным рекордом по высоте свободного падения. Однако, поскольку прыжок был совершен при помощи стабилизирующего парашюта, он не был зарегистрирован как рекорд.

Можно оценить максимальную скорость падения Киттенджера, если считать, что стабилизирующий парашют на высоте $h = 30000$ м сделал его полет равномерным, т.е. сила тяжести была полностью скомпенсирована силой сопротивления воздуха на этой высоте. Тогда формула для зависимости его скорости от высоты будет такой:

$$v = \sqrt{\frac{2M_K g}{CS_K \rho_0} e^{bh}},$$

где M_K – масса Киттенджера вместе с парашютами, составлявшая около 200 кг, S_K – площадь поперечного сечения стабилизирующего парашюта диаметром 1,8 м, а C – коэффициент аэродинамического сопротивления парашюта, который можно считать равным единице. Если подставить все эти данные в формулу, то мы получим $v = 250$ м/с = 900 км/ч, что очень близко к реальным значениям скорости рекордного прыжка.

Таким образом, при полете Киттенджера, как мы и предполагали, присоединенная масса не оказывает существенного влияния, поскольку плотность Киттенджера в десятки тысяч раз больше плотности высотных слоев атмосферы, где он установил свой рекорд.

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Шведская линия

А. ВАСИЛЬЕВ

В РЯДУ ВЫДАЮЩИХСЯ ШВЕДСКИХ УЧЕНЫХ И изобретателей, среди которых Андерс Йонас Ангстрем (1814–1874), Иоганнес Ридберг (1854–1919), Сванте Аррениус (1859–1927), Ханнес Альфвен (1908–1995), блистают также имена Кристофера Польхема (1661–1751) и Андерса Цельсия (1701–1744). Двое последних удостоены чести быть представленными на монетах и банкнотах этого скандинавского государства.

Знаменитого механика и изобретателя *Кристофера Польхема* еще при жизни сравнивали с Архимедом и Леонардо да Винчи. В возрасте шестнадцати лет он поступил в Упсальский университет, где изучал математику и физику, сохраняя при этом глубокий интерес к механике и инженерным наукам. Его первым практическим достижением стал ремонт старинных астрономических часов кафедрального собора в Упсале, созданных Петрусом Астрономусом в 1506 году. Успех этого предприятия произвел сильное впечатление на Коллегию горных предприятий в Швеции, и Польхему было предложено создать устройство для подъема и транспортировки руды, которое впоследствии использовалось на всех шахтах. Спонсируемый этим ведомством, Польхем объездил всю Европу, с тем чтобы привнести в Швецию новейшие технические достижения. В 1697 году в Стокгольме он основал механическую лабораторию, где не только экспонировались новинки технической мысли, но и осуществлялась подготовка инженерных кадров. Эта лаборатория считается предшественником знаменитого Королевского

технологического института.

Крупнейшим достижением Польхема стала полностью автоматизированная фабрика, производившая самую разнообразную продукцию и использовавшая лишь водяную энергию. Хотя продукция фабрики, скажем часы или всякие замки, отличалась высоким качеством и низкой ценой, рабочие отнеслись к фабрике без всякого энтузиазма, справедливо полагая, что бездушные машины со временем заменят их умелые руки. В конце концов фабрика сгорела, однако, воодушевленный идеей технического прогресса, король Швеции Карл XII освободил изобретателя от уплаты налогов в королевскую казну.

Независимо от Джироламо Кардано шведский ученый изобрел карданное соединение, которое в его стране называлось узлом Польхема. Важный вклад Польхем внес в развитие системы водных коммуникаций. Он участвовал в строительстве канала, соединившего западное и восточное побережья Швеции, и спроектировал для него ряд гидротехнических сооружений. Перу Польхема принадлежат труды по медицине, экономике, общественным наукам, геологии и астрономии.

Семейной традицией Цельсиев были занятия астрономией, причем не в качестве хобби, а в ранге профессоров Упсальского университета. Именно эти позиции занимали оба дедушки создателя температурной шкалы (Магнус Цельсий и Андерс Спуде), а также его отец (Нильс Цельсий).

Андерс Цельсий был избран профессором астроно-

мии в Упсальском университете в 1730 году. После этого он предпринял длительный вояж по европейским обсерваториям, где встречался практически со всеми ведущими астрономами своего времени.

Вскоре после своего возвращения в родной город Цельсий принял участие в экспедиции французского астронома П.Мопертюи на север Швеции. Целью этой знаменитой «лапландской» экспедиции было измерение длины земного градуса вдоль меридиана в непосредственной близости к полюсу и сопоставление полученного результата с данными аналогичной экспедиции в Перу вблизи экватора (см. статью «Хорхе Хуан де Сантасилья» в «Кванте» №3 за 2006 г.). Экспедиции подтвердили гипотезу Ньютона о том, что форма Земли представляет собой уплощенный на полюсах эллипсоид, а участие Цельсия в этой экспедиции сделало его знаменитым. Это, в свою очередь, позволило Цельсию получить достаточные средства от шведских властей, чтобы оснастить астрономическую обсерваторию в Упсале наиболее современным оборудованием. Часть оборудования, правда, была закуплена Цельсием еще раньше во время длительного путешествия по Европе.

Обсерватория Цельсия открылась в 1741 году. В те годы задачей профессора астрономии считалось не только наблюдение за звездным небом, но и метеорология, и географические измерения. Он, в частности, внес важный вклад в картографию Швеции и установил, что уровень земель северных стран еще со времен таяния ледников медленно повышается над уровнем моря. Задолго до своего последователя Биркеланда Андерс Цельсий пришел к пониманию того, что северное сияние обусловлено магнитными явлениями, причем такой вывод он сделал, наблюдая отклонение стрелки компаса во время этого природного явления. Цельсий опубликовал каталог 300 звезд, используя созданную им самим фотометрическую систему. Идея этой системы заключалась в наложении друг на друга одинаковых полупрозрачных пластинок. Так, для исключения света от Сириуса, ярчайшей звезды на небе, ему потребовалось 25 пластинок.

Цельсий был активным сторонником введения Грегорианского календаря в Швеции. Первая попытка замены Юлианского календаря здесь была предпринята еще в 1700 году, когда планировалось убирать по дню из високосных лет с 1700 по 1740 годы. Когда же 1704 и 1708 году были объявлены по ошибке високосными, Швеция вернулась к Юлианскому календарю. Уже после Цельсия Швеция ввела новый календарь, сдвинув старый календарь сразу на 11 дней.

Для метеорологических наблюдений Цельсий сконструировал свой знаменитый термометр, где в качестве нулевой точки отсчета, т.е. за 0 градусов, была принята температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении, а в качестве 100 градусов – температура ее замерзания. Уже после его ухода из жизни шкала Цельсия была обращена к ее современному виду. Благодаря точной фиксации методов и условий измерений, шкала Цельсия давала большую воспроизводимость и точность по сравнению с использовавшимися тогда шкалами Фаренгейта и Реомюра. В 1948 году единице температурной шкалы было официально присвоено наименование «градус Цельсия».

Хотя температуры кипения и замерзания воды приблизительно отвечают современным понятиям градуировки, формально исходное определение температурной шкалы Цельсия требует корректировки. Дело в том, что температуры кипения и замерзания воды зависят от атмосферного давления, которое, в свою очередь, зависит от определения температуры. В современной трактовке 0,01 °С устанавливается в тройной точке воды, а градус Цельсия равен 1/273,16 от разности между тройной точкой воды и абсолютным нулем температуры. Согласно этому определению, один градус по шкале Цельсия по абсолютной величине равен одному градусу по шкале Кельвина.

Для преобразования шкалы Цельсия в шкалу Кельвина надо использовать соотношение $K = 273,15 + C$, где K – температура по шкале Кельвина, а C – температура по шкале Цельсия. Для преобразования шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта надо использовать соотношение $F = 1,8 C + 32$, где F – температура по шкале Фаренгейта. Шкала Реомюра в настоящее время практически не используется.

С глубоким прискорбием сообщаем, что с нами больше нет Виктора Васильевича Можаяева, одного из активных авторов и членов редколлегии журнала «Квант».



**Виктор Васильевич
Можаяев
(1938 – 2006)**

В.В.Можаяев был блестящим педагогом, доцентом кафедры общей физики Московского физико-технического института, автором различных пособий и задачников для студентов и школьников, членом жюри многих Всероссийских олимпиад по физике.

Виктор Васильевич отличался незаурядной работоспособностью и абсолютной надежностью. В течение последних более чем пятнадцати лет, пока он вел раздел «Практикум абитуриента» по физике, редколлегия была спокойна – статья в номер будет, будет хорошая и, что важно, вовремя.

Мы с удовольствием общались с этим скромным, но очень достойным и интересным человеком. Нам будет очень не хватать Виктора Васильевича Можаяева.

Мы с удовольствием общались с этим скромным, но очень достойным и интересным человеком. Нам будет очень не хватать Виктора Васильевича Можаяева.

*Редакционная коллегия, редакционный совет,
редакция журнала «Квант»*