Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2101» или «Ф2108». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2101, М2102 предлагались на IV этапе, а задачи М2103 – М2110 – на V этапе XXXIV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2101–М2110, Ф2108–Ф2117

М2101. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что для любого действительного числа x найдется такое действительное число y, что $f(y) = f(x) + y$. Найдите наибольшее возможное значение a.

Д.Терёшин

М2102. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседей, а каждое синее – полусумме соседей. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю.

И.Богданов

М2103. Дана таблица $n \times n$, столбцы которой пронумерованы числами от 1 до n. В клетки таблицы расставляются числа 1, 2, ..., n так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Назовем клетку *хорошей*, если число в ней больше номера столбца, в котором она находится. При каких n существует расстановка, в которой во всех строках одинаковое количество хороших клеток?

К.Чувилин

М2104. Фокусник отгадывает площадь выпуклого 2008-угольника $A_1A_2\ldots A_{2008}$, находящегося за ширмой. За один вопрос он называет две точки на периметре многоугольника; зрители отмечают эти точки, проводят через них прямую и сообщают фокуснику меньшую из двух площадей частей, на которые 2008-угольник разбивается этой прямой. При этом в качестве точки фокусник может назвать либо вершину, либо точку, делящую указанную им сторону в указанном им численном отношении. Докажите, что за 2006 вопросов фокусник сможет отгадать площадь многоугольника.

Н.Агаханов

М2105. Окружность ω с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C. Внутри угла BAC выбрана точка Q. На отрезке AQ нашлась такая точка P, что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает окружности ω_1 и ω_2, описанные около треугольников BPQ и CPQ, вторично в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

А.Акопян

М2106. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1,\ldots,b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1+k)(b_2+k)\ldots$ $\ldots(b_n+k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k, но должен быть всегда больше 1.)

В.Произволов, В.Сендеров

М2107. В неравнобедренном треугольнике ABC точки H и M – точки пересечения высот и медиан соответственно. Через вершины A, B и C проведены прямые, перпендикулярные прямым AM, BM, CM соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника, образованного проведенными прямыми, лежит на прямой MH.

Л.Емельянов

М2108. Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдется натуральное число x такое, что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (с натуральными a, b) при всех $p \in P$ и не представляется в таком виде для любого простого $p \notin P$.

В.Сендеров

М2109. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть P и Q – точки пересечения лучей BA и CD, BC и AD соответственно, а H – проекция D на PQ. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами.

В.Шмаров

М2110*. В блицтурнире принимали участие $2n + 3$ шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее n игр. Докажите, что один из шахматистов, игравших в первой партии, играл и в последней.

А.Грибалко

Ф2108. Вдоль оси X движется точка. В пределах заданной дистанции скорость точки обратно пропорциональна расстоянию от нее до начала координат. Во сколько раз больше времени она тратит на прохождение второй половины дистанции по сравнению с первой?

А.Простов

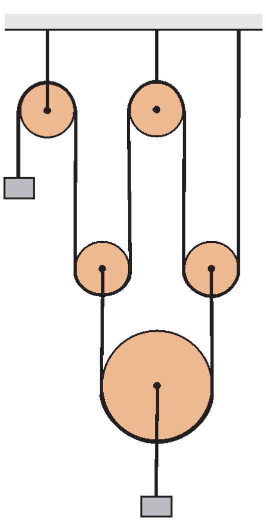


Рис. 1

Ф2109. В системе, изображенной на рисунке 1, большой груз вдвое тяжелее малого. Блоки одинаковые, очень легкие. Нити нерастяжимые, массы нитей пренебрежимо малы, свободные куски нитей вертикальны. Найдите ускорение большого груза.

А.Повторов

Ф2110. Яма имеет полусферическую форму, ее радиус $R = 1$ м, стенки гладкие. На уровне горизонтального диаметра приклеено очень маленькое тело. Оно отклеивается и начинает скользить вниз без начальной скорости. Внизу небольшой кусочек поверхности шероховатый, коэффициент трения там $\mu = 0{,}1$, шероховатый кусочек имеет форму круга, его радиус $r = 1$ см, центр круга находится около самой нижней точке поверхности ямы. Какая часть начальной потенциальной энергии тела выделится при первом преодолении шероховатого кусочка?

Р.Теплов

Ф2111. В сосуде находится смесь одинаковых масс криптона и гелия при давлении 1 атм и температуре 300 К. Проследим за одним из атомов криптона. Оцените число его соударений с другими частицами за 1 час.

З.Рафаилов

Ф2112. Давление разреженного газа в сосуде убывает от 1 атм до 0,2 атм при увеличении объема от 2 л до 20 л, при этом зависимость давления от объема линейная. Найдите максимальную температуру газа в этом процессе. Минимальная температура газа в процессе 200 К.

А.Повторов

Ф2113. Вольтметр и миллиамперметр соединены последовательно и подключены к батарейке, при этом приборы показывают 6,1 В и 1 мА. Параллельно миллиамперметру подключают второй вольтметр – показания первого вольтметра увеличиваются до 6,3 В, а второй вольтметр (он того же типа, что и первый) показывает 0,4 В. Какой ток теперь течет через миллиамперметр? Батарейку можно считать идеальной.

Р.Александров

Ф2114. В схеме, изображенной на рисунке 2, три конденсатора одинаковые и имеют емкость C каждый, а один имеет втрое большую емкость. Между точками $А$ и $Б$ включают катушку индуктивностью L. Найдите максимальное значение силы тока через катушку. Батарейка имеет напряжение U.

А.Мостиков

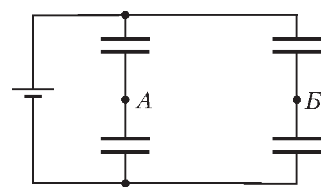


Рис. 2

Ф2115. Катушка индуктивностью $L = 2$ Гн и резистор сопротивлением $R = 100$ Ом соединены параллельно. В некоторый момент к этой цепочке подключают источник постоянного тока силой $I_0 = 3$ А («источник постоянного тока» создает в нагрузке постоянный по величине ток, не зависящий от свойств нагрузки). Найдите количество теплоты, которое выделится в резисторе за большое время.

З.Катушкин

Ф2116. Вдоль прямого участка дороги стоят люди – они встречают дорогого гостя из далекой страны. Интервал между встречающими составляет 0,5 м. Один из встречающих делает шаг в сторону и тут же возвращается на место. Через 2 с то же самое делает его сосед справа, и так далее. С большой высоты кажется, что вдоль шеренги бежит волна. Определите скорость этой волны и ее длину.

А.Гостев

Ф2117. До сих пор любители высококачественного звучания используют усилители звуковой частоты на электронных лампах – они уверены, что качество звучания музыки в этом случае намного лучше, чем при использовании транзисторов (автор задачи не разделяет их уверенности). Рассмотрим практический случай: громкоговоритель имеет сопротивление 4 Ом и для его подключения к усилителю требуется понижающий трансформатор. Выходной каскад усилителя низкой частоты (УНЧ) содержит одну мощную электронную лампу – ее анодный ток может быть в пределах от 20 до 100 мА, напряжение на аноде этой лампы при таких изменениях анодного тока должно находиться в пределах от 40 до 300 В. Какая «выходная мощность» может быть у такого усилителя? Каков должен быть коэффициент трансформации у выходного трансформатора для получения этой мощности?

А.Зильберман

Решения задач М2081–М2085, Ф2093–Ф2101

М2081. *На доске записаны три положительных числа: x, y и 1. Разрешается дописывать на доску сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Всегда ли можно получить на доске число: а) x^2; б) xy?*

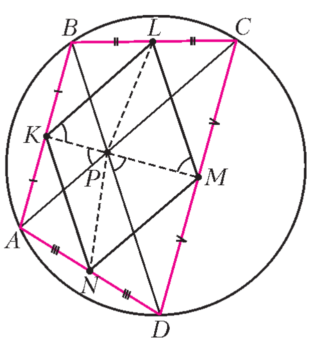
Ответ: а), б) всегда.

а) Запишем на доску по очереди числа $\frac{1}{x}$, $x+1$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x}$, x^2+x, $\left(x^2+x\right)-x=x^2$.

б) Покажем, как разделить y на 2 по правилам задачи: $\frac{1}{y}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y}, \frac{y}{2}$. Далее, умея возводить в квадрат, за несколько шагов получим $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-x^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=xy$.

Г.Гальперин

М2082. *Диагонали вписанного четырехугольника ABCD пересекаются в точке P. Пусть K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников PKL, PLM, PMN, PNK равны.*



Треугольники BAP и CDP (см. рисунок) подобны по двум углам, поэтому подобны и их «половинки» KAP и MDP. Следовательно, $\angle APK=\angle DPM$.

Далее, $KL \parallel AC$, $ML \parallel BD$ (как средние линии треугольников ABC и BCD), значит, $\angle LKP=\angle APK=\angle DPM=\angle LMP$. Итак, углы LKP и LMP, опирающиеся на отрезок LP, равны. Значит, равны и радиусы описанных окружностей треугольников PKL и PLM. Остальные равенства доказываются аналогично.

А.Заславский

М2083. *Дана клетчатая полоса $1 \times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй – нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?*

Ответ: при $N = 1$ выигрывает первый, в остальных случаях – второй.

Случай $N = 1$ очевиден. Пусть $N > 1$. Второй игрок может сделать первый ход в крайнюю клетку. После k-го хода первого игрока крестики делят полоску не менее чем на k частей, состоящих из пустых клеток и ноликов. Но к этому моменту выставлено лишь $k-1$ ноликов, значит, в одной из частей нолика нет, в эту часть и можно поставить нолик.

Б.Френкин

М2084*. *Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих равенству*

$$\frac{x^7-1}{x-1}=y^5-1.$$

Ответ: таких пар нет.

Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть натуральные числа x, n и t таковы, что $x^t-1 \vdots n$, а s – наименьшее натуральное число такое, что $x^s-1 \vdots n$. Тогда $t \vdots s$.

Доказательство. Так как x^t-1 делится на n, то x взаимно просто с n. Разделим t на s с остатком: $t=ks+r$, где $0 \le r < s$. Тогда $x^{ks} \equiv 1 \pmod n$, откуда $\left(x^t-1\right)-\left(x^{ks}-1\right)=x^{ks}\left(x^r-1\right) \vdots n \Rightarrow x^r-1 \vdots n$. Получаем $r = 0$, иначе имеем противоречие с выбором s. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть q – простой делитель числа $\frac{x^p-1}{x-1}$, где x – целое, а p – простое. Тогда либо $q = p$, либо $q = kp + 1$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Так как x^p-1 делится на q, то x не делится на q, и, согласно малой теореме Ферма, $x^{q-1}-1$ делится на q. Пусть s – наименьшее натуральное число такое, что $x^s-1 \vdots q$. Согласно лемме 1, $p \vdots s$ и $q-1 \vdots s$, откуда $s = p$ или $s = 1$. В первом случае $q - 1 = pk$. Во втором случае имеем

$$x \equiv 1 \pmod q \Rightarrow \frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+\ldots+x+1 \equiv$$
$$\equiv p \pmod q \Rightarrow p \vdots q,$$

и, значит, $p = q$. Лемма 2 доказана.

Перейдем к решению задачи. Предположим, что нашлись целые числа x и y, удовлетворяющие равенству $\frac{x^7-1}{x-1}=y^5-1$. Из леммы 2 вытекает, что любой простой делитель числа $\frac{x^7-1}{x-1}$ либо равен 7, либо имеет остаток 1 при делении на 7, значит, $\frac{x^7-1}{x-1}$ дает остаток 0 или 1 при делении на 7.

Пусть $\frac{x^7-1}{x-1} \equiv 1 \pmod 7$. Тогда $y^5 \equiv 2 \pmod 7$, откуда получаем непосредственной проверкой, что возможно лишь $y \equiv 4 \pmod 7$, но в таком случае $y - 1$, а значит и y^5-1, имеет простой делитель p такой, что $p \ne 7$, $p \ne 7k+1$ – противоречие.

Пусть теперь $\frac{x^7-1}{x-1} \equiv 0 \pmod 7$. Тогда $y^5 \equiv 1 \pmod 7$, откуда получаем, что $y \equiv 1 \pmod 7$. Отсюда $\frac{y^5-1}{y-1}=$
$=y^4+y^3+y^2+y+1 \equiv 5 \pmod 7$, поэтому $\frac{y^5-1}{y-1}$, а значит и y^5-1, имеет простой делитель p такой, что $p \ne 7$, $p \ne 7k+1$ – противоречие.

А.Ефимов

М2085*. *Среди участников математического соревнования некоторые дружат между собой; если А дружит с В, то и В дружит с А. Назовем группу участников кликой, если каждые двое из них дружат. Назовем количество человек в клике ее размером. Известно, что наибольший размер клики, состоящей из участников соревнования, является четным числом. Докажите, что всех участников можно рассадить в две комнаты так, чтобы наибольший размер клики в одной комнате был равен наибольшему размеру клики в другой комнате.*

Размер клики X обозначаем $|X|$. Рассмотрим клику G наибольшего размера $|G| = 2n$.

Схема решения такова: мы распределим участников по двум комнатам, а затем будем переводить по одному из второй комнаты в первую, пока не достигнем требуемого результата. Через G_1, G_2 будем обозначать части клики G в первой и второй комнатах, а через k_1, k_2 – наибольшие размеры клик в комнатах.

В течение всего процесса будут выполняться два условия:

(1) $k_1 \le k_2$;

(2) каждый человек в первой комнате дружит со всеми из G_2.

Из условия (2) следует, что $k_1 = |G_1| = 2n - |G_2|$. Действительно, если бы в первой комнате нашлась клика размером больше $|G_1|$, то вместе с G_2 она образовала бы клику размером больше $2n$, что невозможно.

Вначале произвольно разобьем G на группы G_1, G_2 по n человек и отправим их в соответствующие комнаты. Добавим в первую комнату всех, кто дружит со всеми из G_2, всех остальных отправим во вторую. Очевидно, условия (1) и (2) выполнены: $k_2 \ge |G_2| = n = |G_1| = k_1$. Пока $k_2 - k_1 \ge 2$, будем переводить в первую комнату любого из G_2 (если с самого начала $k_2 - k_1 < 2$, то этот этап не выполняем). При этом k_1 растет на 1, k_2 уменьшается не более чем на 1, поэтому $k_2 - k_1$ уменьшается, но остается неотрицательным. Очевидно, выполняется и условие (2). Наконец, мы достигаем того, что $k_2 - k_1 = 0$ или 1.

Если $k_2 - k_1 = 0$, то задача решена; поэтому пусть $k_2 - k_1 = 1$.

Если во второй комнате для некоторой клики K размера k_2 найдется $x \in G_2 \setminus K$ (т.е. x входит в G_2, но не входит в K), то переведем x. Число k_1 увеличится на 1, k_2 не изменится, и задача решена.

В противном случае каждая клика K размера k_2 целиком содержит G_2. Рассмотрим любую такую клику K. Поскольку $k_2 > k_1 \ge n \ge |G_2|$, то найдется $x \in K \setminus G_2$. Очевидно, x дружит со всеми из G_2; переведем его в первую комнату. При этом k_1 не изменится, поскольку условие (2) выполнено, а G_2 не изменилось.

Если k_2 уменьшилось на 1, то задача решена. Иначе повторим эту же операцию. До бесконечности мы повторять ее не можем, значит, в какой-то момент k_2 уменьшится и станет равным k_1, что и требовалось.

Замечание 1. В начальные разбиения годится любое, удовлетворяющее условиям (1) и (2). Например, можно вначале направить всех во вторую комнату.

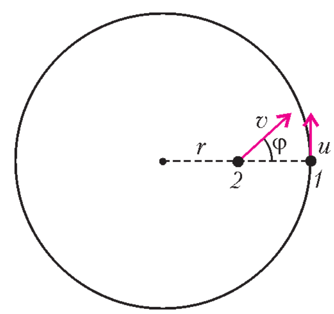
Замечание 2. Более сильное утверждение о том, что в условиях задачи всегда найдется подходящее разбиение, в котором все участники в одной из комнат образуют клику, неверно.

Возьмем $n(2n+1)$ участников, помеченных всеми двухэлементными подмножествами множества $\{1, \ldots, 2n+1\}$. Пусть два участника дружат, когда их подмножества имеют общий элемент.

Предлагаем читателям проверить, что при любом нечетном $n \ge 2$ эта ситуация служит контрпримером к утверждению.

М.Илюхина, Д.Фон-Дер-Флаасс

Ф2093. *Школьник бежит по окружности радиусом $R = 30$ м с постоянной по величине скоростью $u = 3{,}14$ м/с. Второй школьник гонится за ним, стартовав из центра окружности. В процессе погони он все время находится на радиусе, соединяющем центр окружности и первого школьника, а величина его скорости неизменна и равна $v = 2u$. Сколько времени займет погоня?*



Обозначим $\omega = u/R$ угловую скорость движения первого школьника, r – расстояние от второго школьника до центра, φ – угол между направлением скорости второго школьника и радиусом (см. рисунок). Поскольку составляющая скорости второго школьника, перпендикулярная радиусу, равна ωr, а модуль его скорости равен $v = 2u = 2\omega R$, имеем

$$\sin\varphi = \frac{\omega r}{2\omega R} = \frac{r}{2R}.$$

Следовательно, в процессе погони угол φ изменяется от начального значения, равного нулю, до конечного значения

$$\varphi_{к} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Найдем промежуток времени Δt, за который угол φ изменяется на некоторую малую величину $\Delta\varphi$. Для этого заметим, что за этот промежуток времени второй школьник удаляется от центра окружности на расстояние

$$\Delta r = 2R\Delta(\sin\varphi) = 2R(\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi) = 2R\cdot 2\cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Учтем малость угла $\Delta\varphi$ и получим

$$\Delta r = 2R\cdot 2\cos\varphi\cdot\frac{\Delta\varphi}{2} = 2R\cos\varphi\cdot\Delta\varphi.$$

Поскольку радиальная составляющая скорости второго школьника равна $2\omega R\cos\varphi$, он удалится от центра окружности на расстояние Δr за время

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{2\omega R\cos\varphi} = \frac{2R\cos\varphi\cdot\Delta\varphi}{2\omega R\cos\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{\omega},$$

пропорциональное изменению угла.

Значит, время, которое займет погоня, составит

$$t = \frac{\varphi_к}{\omega} = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{\pi R}{6u} = 5 \text{ с}.$$

К.Парфенов

Ф2094. *Небольшой груз массой m, привязанный нитью длиной l к платформе (рис.1), движется по гладкой поверхности стола со скоростью v, описывая окружность. Нить невесома и нерастяжима и образует угол α с вертикалью. Платформа начинает двигаться вверх с ускорением a; при этом вначале груз не отрывается от стола. Найдите величины действующих на груз сил натяжения нити T и реакции стола N сразу после начала движения платформы.*

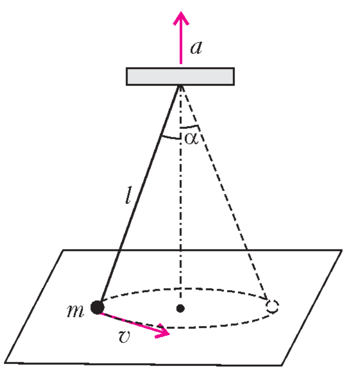


Рис. 1

Пусть a_1 – составляющая ускорения груза, направленная к центру окружности. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления в вертикальной плоскости, проходящей через нить:

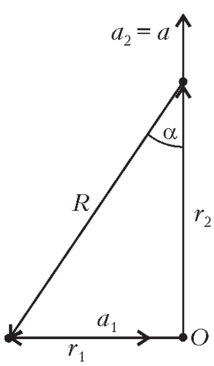


Рис. 2

$$T\cos\alpha - mg + N = 0,$$
$$T\sin\alpha = ma_1.$$

Отсюда находим

$$T = \frac{ma_1}{\sin\alpha} \text{ и } N = mg - ma_1 \operatorname{ctg}\alpha,$$

т.е. для получения ответа остается найти величину a_1.

Поместим начало прямоугольной системы координат в центр окружности, по которой движется груз (рис.2). Означим $\vec{r}_1$ радиус-вектор конца нити, прикрепленного к грузу, $\vec{r}_2$ – радиус-вектор конца нити, прикрепленного к платформе, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости концов нити, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – ускорения концов нити. Введем также обозначения для относительных величин: $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (модуль этой величины равен длине нити), $\vec{V} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (скорость груза относительно верхнего конца нити), $\vec{A} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$. Заметим, что

$$\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} - \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{A}.$$

Так как нить нерастяжима и в процессе движения груза все время натянута, скорость груза относительно верхнего конца нити всегда направлена перпендикулярно нити. Это означает, что скалярное произведение векторов $\vec{R}$ и $\vec{V}$ равно нулю:

$$\left(\vec{R}\cdot\vec{V}\right) = 0.$$

Пусть за малое время Δt векторы $\vec{R}$ и $\vec{V}$ получили малые приращения $\Delta\vec{R}$ и $\Delta\vec{V}$. Запишем для момента времени $t + \Delta t$ полученное выше условие перпендикулярности векторов:

$$\left(\left(\vec{R} + \Delta\vec{R}\right)\cdot\left(\vec{V} + \Delta\vec{V}\right)\right) = 0.$$

Раскрывая скобки, пренебрегая малой величиной $\left(\Delta\vec{R}\cdot\Delta\vec{V}\right)$ и деля обе части равенства на Δt, получим

$$\left(\vec{V}\cdot\vec{V}\right) + \left(\vec{R}\cdot\vec{A}\right) = 0.$$

Сразу после начала движения платформы

$$\vec{v}_1 = \vec{v},\ \vec{v}_2 = 0,\ \left(\vec{V}\cdot\vec{V}\right) = v^2,$$

$$\left(\vec{R}\cdot\vec{A}\right) = \left(\vec{R}\cdot\vec{a}_1\right) - \left(\vec{R}\cdot\vec{a}_2\right) = -la_1\sin\alpha + la\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$v^2 - la_1\sin\alpha + la\cos\alpha = 0, \text{ и } a_1 = a\operatorname{ctg}\alpha + \frac{v^2}{l\sin\alpha}.$$

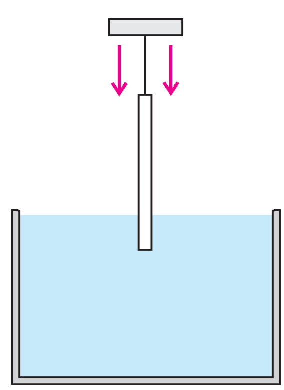
Подставляя найденное значение a_1 в полученные выше формулы для искомых сил, приходим к ответу:

$$T = \frac{ma\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} + \frac{mv^2}{l\sin^2\alpha},$$

$$N = mg - ma\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{mv^2\operatorname{ctg}\alpha}{l\sin\alpha}.$$

М.Ромашка

Ф2095. *Тонкий карандаш, подвешенный на нитке за один из концов, начинают погружать в воду, медленно опуская точку подвеса (см. рисунок). Определите максимальную глубину погружения нижнего конца карандаша, если длина карандаша $l = 18$ см, а его средняя плотность в $n = 2$ раза меньше плотности воды.*



Рассмотрим карандаш, погруженный в воду и отклоненный от вертикали на малый угол α. Суммарный момент силы тяжести и архимедовой силы относительно горизонтальной оси, проходящей через верхний конец карандаша, равен

$$M = mg\frac{l}{2}\sin\alpha - F_A\left(l - \frac{x}{2}\right)\sin\alpha,$$

где $F_A = \rho gSx$ – сила Архимеда, ρ – плотность воды, S – площадь поперечного сечения карандаша, x – длина погруженной в воду части карандаша, $m = (\rho/n)Sl$ – масса карандаша. При $M > 0$ момент сил возвращает карандаш в вертикальное положение, при $M < 0$ – увеличивает отклонение карандаша от вертикали. Формулу для момента сил можно переписать иначе:

$$M = \left(x^2 - 2lx + \frac{l^2}{n}\right)\frac{\rho g S}{2}\sin\alpha .$$

Отсюда следует, что при малых x момент сил $M > 0$ и, следовательно, вертикальное положение карандаша будет устойчивым. Потеря устойчивости вертикального положения происходит при

$$x = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right),$$

когда момент сил меняет знак с положительного на отрицательный. При дальнейшем погружении карандаш будет отклоняться от вертикали, но длина x погруженной в воду его части меняться не будет, поскольку в равновесии момент сил M должен оставаться равным нулю. Поэтому глубина погружения нижнего конца карандаша, равная $x\cos\alpha$, будет при этом уменьшаться.

Итак, максимальная глубина погружения нижнего конца карандаша равна

$$h = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) = l\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 5{,}3 \text{ см}.$$

И.Горбатый

Ф2096. *На гладком горизонтальном столе лежит груз массой m, к которому прикреплены две одинаковые пружины жесткостью k каждая (рис.1). Левый конец пружины 1 прикреплен к стенке, в момент времени t = 0 правый конец пружины 2 начинают медленно перемещать с постоянной скоростью u. 1) Через какое время груз впервые приобретет скорость u? 2) На каком расстоянии от первоначального положения будет находиться он в этот момент?*

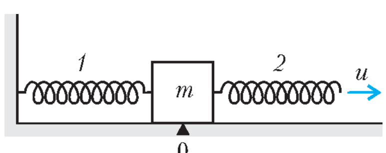


Рис. 1

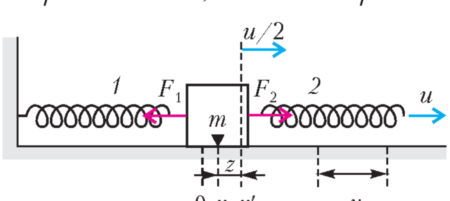


Рис. 2

Введем обозначения: x – смещение груза из первоначального положения, $y = ut$ – смещение правого конца пружины 2 (рис.2). На груз действуют две упругие силы

$$F_1 = kx \text{ и } F_2 = (y - x)k = (ut - x)k .$$

Результирующая этих сил равна

$$F = F_2 - F_1 = kut - kx - kx = k(ut - 2x).$$

Запишем для груза второй закон Ньютона (уравнение движения груза):

$$ma_x = k(ut - 2x).$$

Перейдем теперь в систему отсчета Z, движущуюся с постоянной скоростью $u/2$ относительно «неподвижной» системы. Обе системы инерциальные, поэтому ускорения груза в обеих системах одинаковы: $a_x = a_z$. В момент времени t начало координат новой системы находится в точке $x' = \frac{u}{2}t$. Координата груза в этот момент равна $z = -(x' - x) = -x' + x$. Второй закон Ньютона в «движущейся» системе отсчета будет иметь вид

$$ma_z = k(ut - 2z - ut) = -2kz .$$

Это – уравнение свободных колебаний груза с угловой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} .$$

В момент времени $t = 0$ груз находится в начале координат «движущейся» системы $z_0 = 0$ и имеет скорость $v_0 = -\frac{u}{2}$. Через полпериода колебаний, т.е. через время

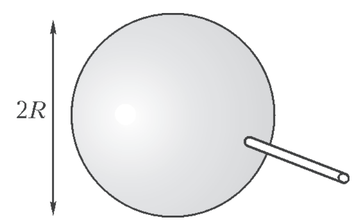
$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}} ,$$

скорость груза в этой системе будет равна $+\frac{u}{2}$, и он снова будет находиться в точке $z = 0$. Следовательно, в «неподвижной» системе скорость груза в этот момент будет равна u, и от первоначального положения он будет находиться на расстоянии

$$x = \frac{u}{2}\Delta t = \frac{\pi}{2}u\sqrt{\frac{m}{2k}} .$$

А.Гуденко

Ф2097. *Через короткую трубку выдувают мыльный пузырь с массой $m = 0{,}01$ г и коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 0{,}01$ Н/м (см. рисунок). Пузырь заряжают зарядом $Q = 5{,}4\cdot 10^{-8}$ Кл. Трубка остается открытой. 1) Определите равновесный радиус пузыря R_0. 2) Определите период малых колебаний пузыря, если при колебаниях он сохраняет сферическую форму. 3) Оцените, с какой скоростью разлетятся брызги, если пузырь внезапно зарядить зарядом $Q_1 = 10Q$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2).*



1) Найдем давление на пузырь, обусловленное электростатическими силами. Рассмотрим малый элемент ΔS его поверхности. Напряженность E_0 электрического поля, действующего на него, по модулю равна напряженности E_1 поля, создаваемого им самим вблизи его поверхности (это следует, например, из того, что напряженность поля внутри пузыря должна быть равна нулю). Тогда на пузырь действует электрическая сила

$$F_э = E_0\Delta Q = E_0\frac{Q\Delta S}{4\pi R^2}, \text{ где } E_0 = E_1 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q}{4\pi R^2} .$$

Таким образом, давление на пузырь, обусловленное электростатическими силами, равно

$$p_э = \frac{F_э}{\Delta S} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} .$$

Давление сил поверхностного натяжения составляет

$$p_\sigma = -\frac{4\sigma}{R}.$$

Суммарное давление $p = p_э + p_\sigma$ в равновесном состоянии равно нулю:

$$\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_0^4} - \frac{4\sigma}{R_0} = 0.$$

Следовательно, равновесный радиус пузыря равен

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{128\pi^2\varepsilon_0\sigma}} \approx 3{,}0 \text{ см}.$$

2) Если радиус пузыря изменился по сравнению с равновесным значением R_0, то на малый элемент ΔS его поверхности будет действовать сила

$$F = p\Delta S = 4\sigma\left(\frac{R_0^3}{R^4} - \frac{1}{R}\right)\Delta S.$$

При малых изменениях радиуса $\Delta R \ll R_0$ выражение для силы принимает вид

$$F = \left.\frac{dp}{dR}\right|_{R=R_0} \cdot \Delta R \Delta S =$$

$$= 4\sigma\Delta R\Delta S\left.\left(-\frac{4R_0^3}{R^5} + \frac{1}{R^2}\right)\right|_{R=R_0} = -\frac{12\sigma}{R_0^2}\Delta R\Delta S.$$

Знак «минус» означает, что равновесное состояние пузыря устойчиво.

Запишем второй закон Ньютона для элемента поверхности ΔS массой Δm:

$$\Delta m \Delta R'' = -\frac{12\sigma}{R_0^2}\Delta R \Delta S, \text{ где } \Delta m = \frac{m\Delta S}{4\pi R_0^2},$$

откуда получаем

$$\Delta R'' + 48\frac{\pi\sigma}{m}\Delta R = 0.$$

Это – уравнение свободных колебаний с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{48\pi\sigma}{m}}.$$

Таким образом, период колебаний будет равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi m}{12\sigma}} \approx 16 \text{ мс}.$$

3) Скорость разлета брызг v можно оценить из закона сохранения энергии. Пренебрегая поверхностной энергией, запишем

$$\frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0} = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{100Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0 m}} \approx 94 \text{ м/с}.$$

А.Ольховец

Ф2098. *Найдите сопротивление электрической цепи между точками A и B (рис.1). Сопротивление стороны большого шестиугольника равно R, сопротивление стороны малого шестиугольника равно R/2, сопротивление каждого внутреннего проводника, заключенного между шестиугольниками, равно R/2, а сопротивление каждого проводника, находящегося внутри малого шестиугольника, равно R/4.*

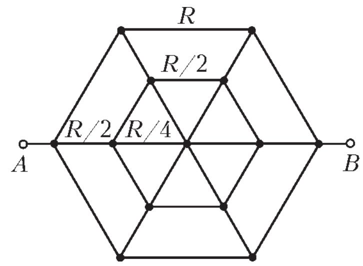


Рис. 1

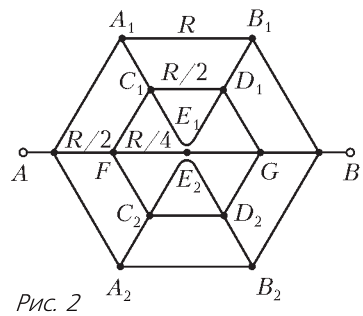


Рис. 2

В схеме электрической цепи, изображенной на рисунке 2, точки E_1, E_2 и центр схемы имеют, в силу ее симметрии, одинаковые потенциалы. При их соединении проводником с нулевым сопротивлением токи в цепи и ее сопротивление не меняются, а полученная при таком преобразовании схема совпадает со схемой, приведенной в условии. Рассчитаем сопротивление этой цепи.

Пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, D_1 и D_2, также в силу симметрии, имеют попарно одинаковые потенциалы. Соединяя их, получаем эквивалентную схему, изображенную на рисунке 3; здесь учтено, что сопротивление двух параллельно соединенных одинаковых резисторов вдвое меньше сопротивления каждого из них. Заметим, что пары точек A_{12} и F, B_{12} и G имеют одинаковые потенциалы; соединяя их, получаем электрическую цепь, схема которой изображена на рисунке 4. Ее сопротивление легко рассчитывается по формулам последовательного и параллельного соединения проводников: оно равно

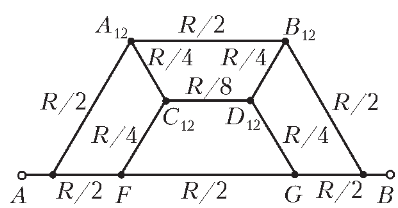


Рис. 3

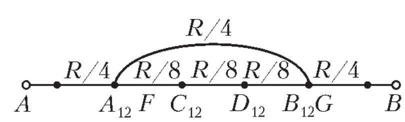


Рис. 4

$$R_0 = \frac{13R}{20}.$$

Е.Простомолотова

Ф2099. *В цилиндре под поршнем находится смесь воздуха и паров некоторой жидкости. Смесь изотермически сжимают. На рисунке 1 представлена экспериментальная зависимость давления в сосуде от объема в этом процессе. Чему равны давление насыщенных паров жидкости при данной температуре и внутренняя энергия смеси при объеме цилиндра более 5 л?*

Примечание. Считать воздух идеальным двухатомным газом, а пары жидкости – идеальным трехатом-

Рис. 1

ным газом.

Предположим, что эксперимент проводится при температуре T. Очевидно, что насыщение пара наступает в точке излома изотермы (см. рис. 1). Тогда для объемов $V > 5$ л уравнение газового состояния, в соответствии с законом Дальтона, имеет вид

$$p_1V_1 = (\nu_1 + \nu_2)RT,$$

где ν_1 – количество молей воздуха в сосуде, ν_2 – количество молей паров жидкости в сосуде, V_1 – любой объем, превышающий 5 л, а p_1 – соответствующее ему давление в сосуде (рис.2). Для объемов $V < 5$ л давление в сосуде складывается из давления воздуха и давления насыщенного пара. Уравнение газового со-

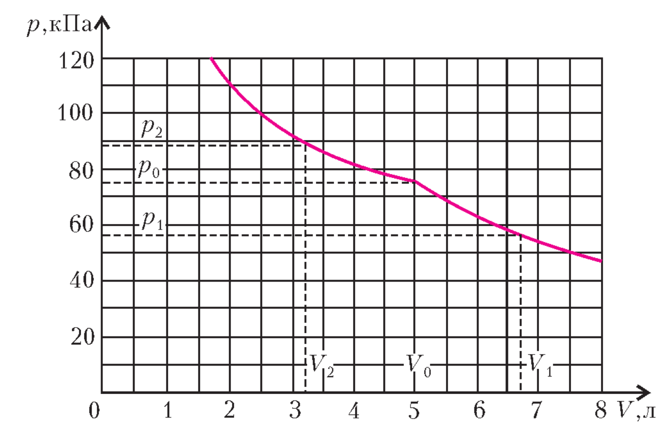


Рис. 2

стояния имеет вид

$$p_2V_2 = p_{н}V_2 + \nu_1RT,$$

где V_2 – любой объем, не превышающий 5 л. Обе кривые, описывающие состояние газа для объемов больше и меньше 5 л, пересекаются в точке с координатами V_0, p_0, следовательно, при $V = V_0$ имеем

$$\nu_2RT = p_{н}V_0.$$

Из полученных уравнений находим

$$p_{н} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{V_0 - V_2} \approx 50 \text{ кПа}.$$

Следует заметить, что для получения более точного численного результата целесообразно с помощью графика на рисунке вычислить несколько произведений p_1V_1 для различных объемов $V > 5$ л и усреднить полученные значения. Аналогично, вычисление окончательного результата лучше проводить для нескольких значений V_2 и соответствующих ему значений p_2. При построении графика использовались такие численные значения: $T = 300$ К, $\nu_1 = 0{,}05$ моль, $\nu_2 = 0{,}1$ моль, $p_{н} = 50$ кПа.

Внутренняя энергия смеси при $V > 5$ л вычисляется по формуле

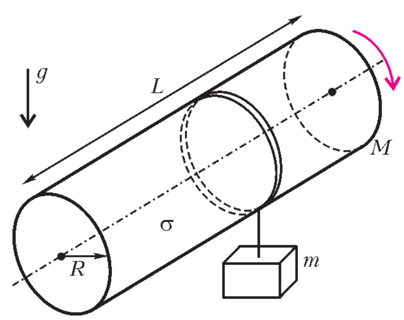
$$U = \frac{5}{2}\nu_1RT + 3\nu_2RT,$$

или, с учетом полученных ранее выражений,

$$U = \frac{5}{2}(p_0 - p_{н})V_0 + 3p_{н}V_0 \approx 1060 \text{ Дж}.$$

С.Кармазин

Ф2100. *На длинном тонкостенном диэлектрическом цилиндре радиусом R, длинной $L \gg R$ и массой M размещен электрический заряд с одинаковой поверхностной плотностью σ. Цилиндр может свободно (без трения) вращаться вокруг своей оси под действием груза массой m, подвешенного на невесомой нити, намотанной на цилиндр (см. рисунок). Определите ускорение груза. Магнитную постоянную μ_0 считать заданной.*



При вращении цилиндра возникает круговой ток, создающий магнитное поле внутри цилиндра.[1] Полная сила тока, текущего по поверхности цилиндра, равна $I = \sigma vL$, где v – линейная скорость зарядов. Ток, приходящийся на единицу длины цилиндра, равен $i = I/L = \sigma v$. Магнитное поле B внутри цилиндра совпадает с магнитным полем длинной катушки:

$$B = \frac{\mu_0 I}{L} = \mu_0\sigma v.$$

Плотность магнитной энергии равна $w_{м} = B^2/(2\mu_0) = \mu_0\sigma^2v^2/2$. Тогда полная энергия магнитного поля составляет

$$W_{м} = w_{м} \cdot \pi R^2L = \frac{kv^2}{2}, \text{ где } k = \pi\mu_0\sigma^2R^2L.$$

Суммарная кинетическая энергия вращающегося цилиндра и движущегося груза равна

$$W_{к} = \frac{(m+M)v^2}{2}.$$

Если координатную ось X направить вниз, то потенциальную энергию груза можно представить в виде

$$W_{п} = -mgx + \text{const}.$$

[1] *Поробнее об этом см. в статье Ю.Маношкина и А.Стасенко «Магнитный тормоз и формула Эйнштейна» в «Кванте» №5 за 2004 год.*

Запишем теперь закон сохранения энергии, включая механическую энергию цилиндра и груза и энергию магнитного поля внутри цилиндра:

$$W_{\text{к}} + W_{\text{п}} + W_{\text{м}} = \text{const},$$

или

$$(m + M + k)\frac{v^2}{2} - mgx = \text{const}.$$

Продифференцировав это уравнение по времени, принимая во внимание, что $v = \frac{dx}{dt}$ и $a = \frac{dv}{dt}$, найдем искомое ускорение:

$$a = \frac{mg}{m + M + k} = \frac{mg}{m + M + \pi\mu_0\sigma^2 R^2 L}.$$

М.Осин

Ф2101. *Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы. От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны только параллельные друг другу собирающая линза, объект и его действительное изображение (рис.1). Из пояснений к чертежу было ясно, что за линзой находилось плоское зеркало. Восстановите построением по имеющимся данным положение зеркала и найдите положение фокусов линзы.*

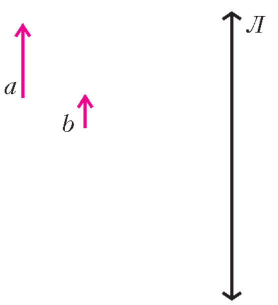


Рис. 1

Из обратимости хода лучей следует, что результат решения задачи не зависит от того, какая из стрелок a или b, заданных в условии, является предметом, а какая – его изображением в системе линза–зеркало. Так как стрелки a и b параллельны линзе, то их изображения A и B тоже параллельны линзе и, следовательно, друг другу. А поскольку A и B параллельны друг другу, то они параллельны и зеркалу, причем прямая, проходящая через их концы, параллельна главной оптической оси. Следовательно, луч, распространяющийся вдоль этой прямой, преломляясь, в линзе, пройдет через фокус и концы стрелок a и b. Таким образом, построение будем проводить в следующем порядке.

1) Построим главную оптическую ось линзы OO_1, которая проходит через оптический центр перпендикулярно плоскости линзы (рис.2).

2) Проведем лучи, проходящие через начала и концы предмета и его изображения. Эти лучи должны пересекать оптическую ось в фокусе F линзы.

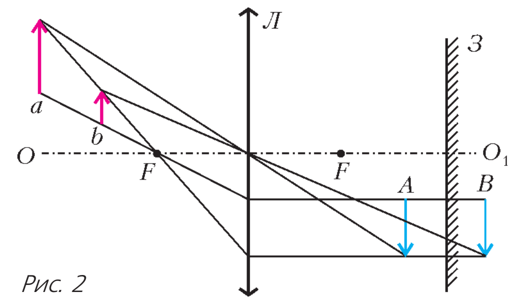


Рис. 2

3) Задний фокус линзы находится справа от линзы на таком же расстоянии от нее.

4) Одна из стрелок a или b, указанных в условии, является предметом, а другая – его изображением в системе линза–зеркало. Построим изображения этих стрелок в линзе, используя обратимость хода лучей. Для этого возьмем стандартные лучи – проходящие через фокус линзы и через ее центр. Получим изображения A и B.

5) Одна из стрелок A или B является предметом по отношению к плоскому зеркалу, а другая – его изображением. Следовательно, плоское зеркало должно располагаться посередине между стрелками A и B.

Г.Тарнопольский

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Пять петель

(Начало см. на 4-й с. обложки)

В одной из самых авторитетных книг, посвященных головоломкам, написано, что головоломка «Пять петель» создана в 1983 году в Голландии. Однако в далекой от Голландии Малайзии похожую игрушку считают давно известной забавой местных племен, до сих пор живущих в джунглях изолированно от европейской цивилизации.

В 1974 году я ездил по деревням Архангельской области, разыскивая старинные северные головоломки. В селе Конёве в одном из домов среди старых вырезанных из дерева игрушек мне попалась незнакомая головоломка, сплетенная из ивовой лозы. Одна из четырех петель у нее была сломана, но я сохранил этот экземпляр, изготовленный не менее 50 лет назад.

На фотографиях на обложке журнала представлены и малайзийская, и архангельская головоломки. Изготовьте аналогичную игрушку и постарайтесь отцепить веревочную петлю от центрального стержня, воспользовавшись приведенной схемой с промежуточными этапами решения.

Однако существует и более интересный путь – научиться самостоятельно быстро и без подсказки снимать и надевать веревочную петлю, а попутно пополнить свою коллекцию сразу несколькими головоломками. Для этого приготовьте жесткие проволочные петли и стержень, но не торопитесь скреплять их друг с другом. Сначала соедините только две петли и стержень. В результате вы получите первый, самый простой вариант головоломки. Освоив вариант с двумя петлями, добавьте в головоломку третью и потренируйтесь в ее решении. Наконец, закрепив четвертую петлю, вы получите классическую головоломку, решить которую сможете самостоятельно.

Наращивать количество петель в изготовленной вами модели можно и далее, но лучше сделать несколько вариантов головоломок возрастающей трудности – с двумя, четырьмя, шестью и даже с восьмью жесткими петлями.

Желаем успеха!

А.Калинин

К М Ш

Задачи

1. Можно ли расставить числа от 1 до 15 в клетках таблицы 3×5 так, чтобы во всех строках суммы чисел были одинаковы, и во всех столбцах суммы чисел были одинаковы?

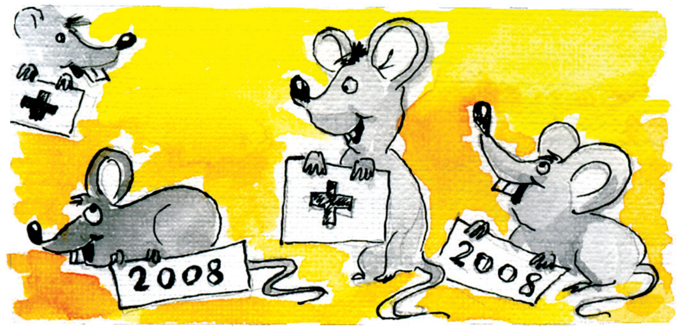
В.Доценко

2. За круглым столом сидят 31 человек. Часть из них – рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные – лжецы, которые всегда лгут, причем лжецов не менее одного. Каждого спросили: «Сколько среди твоих соседей лжецов?» (имеются в виду сосед слева и сосед справа). Все дали одинаковые ответы. Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться за столом?

Д.Калинин

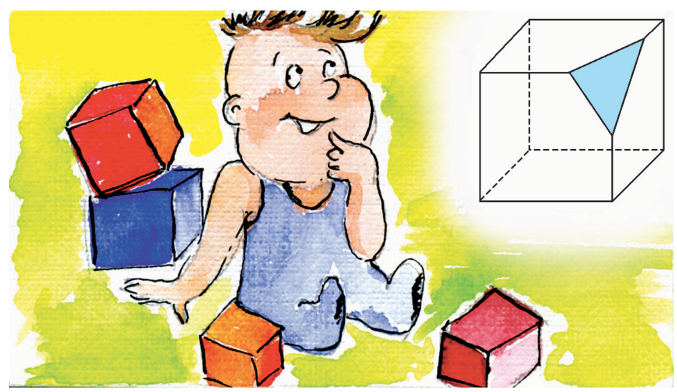
3. К некоторому натуральному числу прибавили 2008, затем к результату снова прибавили 2008, и так далее. Обязательно ли в какой-то момент получится число, начинающееся на 1?

С.Дориченко



4. Можно ли отпилить от кубика 10×10×10 уголок так, чтобы срез имел форму треугольника со сторонами 2, 3, 4?

А.Шень



5. Имеются шесть гирь, массы которых равны 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г и 6 г. На каждой гире надписана масса в граммах, но надписи возможно перепутаны. Как за два взвешивания на чашечных весах выяснить, есть ли среди надписей неправильные (не важно, какие именно)?

С.Токарев

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

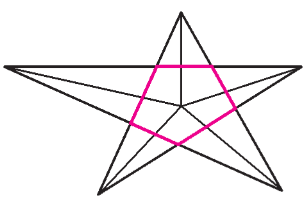
Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6—8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. Имеются 11 гирь, массы которых равны 1 г, 2 г, 4 г,... ..., 1024 г. На каждой гире надписана масса в граммах, но надписи возможно перепутаны. Как за 10 взвешиваний на чашечных весах выяснить, есть ли среди надписей неправильные (не важно, какие именно)? Удастся ли сделать это за 9 взвешиваний?

К.Шрамов



7. В «неправильной» пятиконечной звезде биссектрисы углов при вершинах пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектрисы углов внутреннего пятиугольника пересекаются в одной точке.

Фольклор

8. Назовем натуральное число *a хорошим*, если найдется прямоугольный треугольник с целыми сторонами, одна из сторон которого равна *a*. Найдите все хорошие числа.

Е.Поршнев

9. Докажите, что через точку пересечения медиан треугольника нельзя провести прямую, которая делила бы его площадь в отношении 2:1.

В.Доценко

10. Концами пятидесяти отрезков на числовой прямой являются все натуральные числа от 1 до 100. Длина каждого отрезка кратна пяти, а сумма всех длин равна 2500. Докажите, что отрезки можно разбить на пять десятков так, что в каждом десятке сумма длин отрезков будет равна 500.

В.Произволов

Летний турнир имени А.П.Савина «Математика 6-8»

В выпуклом многоугольнике сумма тупых углов равна 2008°. Сколько сторон у этого многоугольника?

А.Шаповалов

С 26 июня по 2 июля 2008 года под городом Судиславлем Костромской области состоялся летний турнир математических боев имени А.П.Савина. Это уже 14-й такой турнир, и популярность его растет с каждым годом. Организаторами турнира выступили образовательная программа «Большая перемена» (директор Г.В.Кондаков) и база отдыха «Берендеевы поляны». Лишь размеры базы вынудили организаторов ограничиться 32 командами 6—9 классов. Кроме москвичей, составивших львиную долю команд, в турнире приняли участие команды из Иванова, Кирова, Костромы, Ленинградской области, Магнитогорска, Харькова и Черноголовки. Команды были разделены на 5 лиг: четыре основные лиги по классам и еще одна лига, объединившая четыре оставшиеся команды 6 и 7 классов.

В первый день для разминки была проведена новая математическая игра «Абака»[1], вызвавшая большой интерес у школьников.

Во второй день у старших школьников начались круговые турниры матбоев (5 туров), у младших прошла устная командная олимпиада для разделения на лиги, а 4 тура матбоев начались со следующего дня.

В лиге 9 классов интрига сохранялась до последнего: сборные Магнитогорска (руководитель Н.С.Никифорова), Костромы (руководитель Д.А.Калинин) и «Квантик-1» из Москвы (руководитель И.А.Николаева) выиграли друг у друга по кругу и победили остальные 3 команды. Блиц-бой вывел на первое место Кострому, на 2-е — «Квантик-1», оставив Магнитогорск на 3-м месте. В лиге 8 классов борьба была менее острой: с заметным отрывом, выиграв все бои, победила команда «Эврика» из Харькова (руководитель А.Л.Берштейн), 2-е и 3-е места — у московских

[1] *См. об этом статью К.Кнопа «Абака для математиков» в газете «Математика» («Первое сентября») № 16/2008.*

команд «Л2Ш» (т.е. лицей «Вторая школа», руководитель А.Г.Кондакова) и гимназии 1514 (руководитель Л.О.Бычкова). В лиге 7 классов диплом I степени достался команде «Москва-Юг» (руководитель Т.П.Зорина), дипломы II степени – командам Кирова (руководитель Н.Н.Франчески) и «2007-Б» из Москвы (руководитель Д.В.Прокопенко), дипломы III степени – командам Ленинградской области (руководитель С.П.Павлов) и «2007-А» из Москвы (руководитель О.Е.Данченко). В лиге 6 классов диплом I степени выиграла команда Кирова (руководитель М.А.Прокашева), дипломы II степени – команды «Кострома 6-6-6» (руководитель Н.Л.Чернятьев) и «Интеллектуал» из Москвы (руководитель Н.М.Нетрусова), дипломы III степени – команды «Эврика-1» и «Эврика-2» из Харькова (руководитель Е.Л.Аринкина).

Один из дней в середине турнира был отдан под личную устную олимпиаду. Участнику выдавался листочек с тремя задачами. Решив одну, участник получал второй листочек с еще тремя задачами. Решив задачу из второго листочка, участник получал последний, третий листочек с еще тремя задачами. Ученики 6–7 классов решали одни и те же задачи, но с раздельным зачетом. Аналогично проходила личная олимпиада и для учеников 8 и 9 классов.

Призеры личной олимпиады

Гран-при завоевали семиклассник *Всеволод Гулин* («Эврика», Харьков), опередивший всех в олимпиаде для старших на 2 задачи и разделивший первое место в олимпиаде для младших, и шестиклассница *Юлия Гребенникова* («Интеллектуал», Москва), опередившая своих сверстников на одну задачу.

Дипломы I степени получили

Глухов Евгений – Кострома, 9 кл.,
Николаев Семен – Москва, «Квантик-1», 9 кл.,
Бурова Ольга – Москва, «Л2Ш», 8 кл.,
Лисичкин Сергей – Харьков, «Эврика», 8 кл.,
Сандрикова Мария – Москва, школа 218, 7 кл.,
Синяков Лев – Москва, «Москва-Юг», 7 кл.,
Любчик Евгений – Харьков, «Эврика-2», 6 кл.,
Зверев Иван – Москва, «Москва-Юг», 6 кл.

Дипломы II степени получили

Зиборов Артем – Москва, школа 218, 9 кл.,
Ноздрин Михаил – Магнитогорск, 9кл.,
Пастух Денис – Москва, школа 218, 9 кл.,
Яцкевич Максим – Москва, гимназия 1514, 9 кл.,
Вилкул Даниил – Москва, «Л2Ш», 8 кл.,
Матвеевский Дмитрий – Харьков, «Эврика», 7 и 8 кл.,
Логвинов Сергей – Москва, «Москва-Юг», 7 кл.,
Баев Будимир – Москва, «Фрактал», 6 кл.,
Бакунов Никита – Харьков, «Эврика-2», 6 кл.,
Горбунов Дмитрий – Москва, «Интеллектуал», 6 кл.

Дипломы III степени получили

Абрамян Левон – Магнитогорск, 9 кл.,
Деревицкий Иван – Магнитогорск, 9кл.,
Ланина Наталья – Москва,«Квантик-1», 9 кл.,
Яцкевич Максим – Москва, гимназия 1514, 9 кл.,
Топеха Артур – Москва, «Квантик-2», 9 кл.,
Завадский Дмитрий – Ленинградская область, 8 кл.,
Циглер Александр – Магнитогорск, 8 кл.,
Шолохов Александр – Иваново, 8 кл.,
Виноградов Алексей – Москва, гимназия 1514, 7 кл.,
Котельникова Дарья – Киров, 7 кл.,
Мирский Алексей – Москва, «Интеллектуал», 7 кл.,
Рахматулин Ян – Киров, 7 кл.,
Жабрёв Илья – Ленинградская область, 6 кл.,
Калашников Вадим – Харьков, «Эврика-1», 6 кл.,
Князева Алиса – Харьков, «Эврика-2», 6 кл.,
Корякин Данил – Киров, 6 кл.,
Малыгин Виталий – Киров, 6 кл.,
Мизюк Соломия – Москва, школа 2007, 6 кл.,
Сиротина Анастасия – Москва, школа 2007, 6 кл.

Поощрительными дипломами отмечены

семиклассники: кировчане *Никита Козицын* и *Роман Маракулин*, москвичи *Ирина Булушева*, *Артем Закиров* и *Сергей Рафаэлов* (все из школы 2007), *Денис Булейко* (гимназия 1514), *Наталья Остроухова* (школа 218) и *Мария Щербакова* («Фрактал»).

Книги и другие призы для победителей предоставили редакция журнала «Квант», компания «Яндекс» и Фонд математического образования и просвещения.

Отбором задач и составлением вариантов занималась методическая комиссия турнира: А.Л.Берштейн, М.А.Берштейн, А.Д.Блинков, Ю.А.Блинков, А.С.Горская, Н.Гребеник, С.А.Дориченко, А.Ефремов, Д.А.Калинин, П.Мартынов, К.Матвеев, Д.В.Прокопенко, В.А.Сендеров, А.Б.Скопенков, К.Скопцов, С.И.Токарев, А.В.Шаповалов.

Избранные задачи турнира

По традиции, идущей еще от первых турниров, большинство задач турнира были новыми и авторскими. Из них мы постарались выбрать такие, где есть пусть маленькое, но чудо: из условий следует чуть-чуть больше, чем можно ожидать, или в решении есть неожиданный поворот и краткость.

У каждой задачи указано, для каких классов она наиболее подходит и кто ее автор. Звездочками отмечены трудные задачи, двумя звездочками – особо трудные.

1 (6–7). На поверхности кубика Рубика $3\times3\times3$ отмечены несколько точек так, что в каждом из 54 квадратиков, включая его границу, отмечена ровно одна точка. Какое наименьшее число точек может быть отмечено?

А.Шаповалов

2 (6–7). Дано натуральное число, у которого все цифры, кроме одной, нечетные. Может ли оно делиться на 2008?

С.Токарев

3 (6–8). В однокруговом волейбольном турнире участвовали 14 команд. *Интересной* назовем команду, выигравшую нечетное число матчей, а *особенной*

— команду, выигравшую нечетное число матчей у интересных. Докажите, что число особенных команд четно.

С.Токарев

4 (6–8). Двум игрокам выдано по карточке с числами a и b из набора, где 1, 2, ..., 10 встречаются по разу. Каждый видит только свое число. Игроки Первый и Второй по очереди называют числа, каждое должно быть больше предыдущего и заведомо (для называющего) делить НОК(a, b). Кто не смог сделать ход – проиграл. Есть ли такая карточка, получив которую Первый может быть уверен в выигрыше?

А.Шаповалов

5 (6–9). Какое наименьшее число слонов можно расставить на доске $2N \times 2N$ так, чтобы каждое свободное поле было побито ровно один раз?

А.Шаповалов

6 (6–9). На шахматную доску по одной выставляются ладьи так, чтобы каждая выставленная побила (на момент выставления) четное число пустых полей. Какое наибольшее число ладей можно выставить?

А.Шаповалов

7** (6–9). Можно ли поверхность куба оклеить без перекрытий тремя одинаковыми пятиугольниками?

С.Токарев

8* (7–8). В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 85°$, $\angle B = 115°$, $AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите $\angle MAB$.

А.Шаповалов

9 (7–8). Натуральное число n можно заменить на одно из следующих 6 чисел: $3n$, $3n+1$, $3n+2$, $n/3$, $(n+1)/3$, $(n+2)/3$ при условии, что получающееся число – целое. Докажите, что с помощью таких операций из любого натурального числа можно получить любое.

Л.Смирнова

10 (7–8). Корень n-й степени из n-значного числа равен сумме цифр этого числа ($n > 1$). Найдите все значения, которые может принимать этот корень.

С.Шестаков

11 (7–8). Даны два равных прямоугольника $ABCD$ и $AEFG$ ($AB = AE, AD = AG$) таких, что точка G лежит на отрезке BC. Точка P – пересечение отрезков FG и CD. Докажите, что отрезки PB и PE равны.

Д.Калинин

12 (7–9). За круглым столом сидят 2000 рыцарей, которые представляют 999 рыцарских орденов, причем каждый орден кем-нибудь представлен. Среди любых 1000 подряд сидящих рыцарей есть представители не более чем 500 орденов. Сколько рыцарей первого ордена присутствует за круглым столом? Найдите все возможные ответы и покажите, что других нет.

К.Матвеев

13 (7–9). Существуют ли ненулевые целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2008}$ такие, что

$$x_1x_2\ldots x_{2008} = (x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_{2008}+x_1)?$$

С. Токарев, В. Сендеров

14 (7–9). Дан клетчатый квадрат $n \times n$, в котором стерли все клетки выше главной диагонали. В каждой клетке оставшейся фигуры записывают 0 или 1, при этом если в какой-то клетке написана единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху также должна стоять единица. Сколькими способами это можно сделать?

А.Горская

15 (7–9). Диаметром треугольника назовем длину его наибольшей стороны. Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника одинакового диаметра.

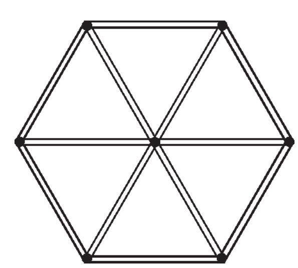
А.Шаповалов

16 (7–9). Дана таблица из 40 строк и 20 столбцов. В первом столбце закрашена самая нижняя клетка, во втором столбце закрашены 3 нижние клетки и т. д.; в 20-м столбце закрашены 39 нижних клеток. Два игрока по очереди ставят ладьи в закрашенные клетки так, чтобы ладьи не били друг друга. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?

К.Матвеев

17* (7–9). Натуральное число N равно произведению первых l простых чисел. Докажите, что любое натуральное число, меньшее N, может быть представлено как сумма нескольких различных натуральных делителей N.

К.Матвеев



18* (7–9). В системе коридоров, показанной на рисунке, расстояние между каждыми двумя соседними развилками одно и то же. По коридорам бегает мышка, способная развивать скорость до 7 м/с. За мышкой согласо-

(Продолжение см. на с. 34)

Переходы тел в свет и света в тела подчиняются законам Природы, которая, как кажется, забавляется этими превращениями.

Исаак Ньютон

Свет, падающий на тело, разделяется на две части, из которых одна отражается от его поверхности (рассеивается)...

Джон Тиндаль

Интенсивность рассеянного света пропорциональна четвертой степени частоты световой волны или обратно пропорциональна четвертой степени длины волны.

Джон Уильям Рэлей

Этот пепел, долго плавающий в атмосфере, обусловил синеватый цвет солнца и луны в Африке и на островах Тихого океана и замечательные красные зори в конце 1883 и в начале 1884 года, наблюдавшиеся по всей земле.

Владимир Обручев

Если значение слова «свет» понимать более широко (а есть все основания подразумевать под ним также все разнообразные виды излучений...), тогда свет можно рассматривать как мощное средство передачи из одного места вселенной в другое... энергии...

Уильям Генри Брэгг

...голубой свет рассеивается значительно интенсивнее, чем красный свет. И, взглянув на небо, мы видим только изумительную синеву!

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомо вам распространение света?

Во-первых, как и было обещано в предыдущем выпуске «Калейдоскопа», мы продолжим обсуждение волновых явлений. Во-вторых, следуя Брэггу, мы распространим понятие «свет» на всевозможные электромагнитные волны, хотя, безусловно, главенствующую роль оставим за видимым светом. В-третьих, аналогично прошлому разу, сосредоточимся прежде всего на процессах рассеяния и поглощения. Оказывается, даже при таком ограничении рамки нашей рубрики не способны вместить и малую толику из всего многообразия вопросов, связанных с всеволновой оптикой.

Действительно, мы соприкасаемся с ними в быту и на отдыхе, в медицине и искусстве, в науке и технике. Рассеиваясь и поглощаясь, световые волны пронизывают вокруг все и вся — подбираем ли мы краски для ремонта или для написания картин, пытаемся ли объяснить атмосферные или астрономические явления, выбираем ли посуду для приготовления пищи, ищем ли способы исследования вещества или решаем проблемы передачи информации.

Тем не менее, найденные учеными общие закономерности волновых явлений позволяют успешно справиться как с повседневными бытовыми затруднениями, так и с фундаментальными научными препятствиями. А в награду за их преодоление оптика дарит порой такое эстетическое наслаждение и такой эмоциональный подъем, что скрыть их не в силах и выдающиеся рациональные умы.

Ну что ж, попробуем *рассеянных* обратить в тех, кто будет *поглощен* этой темой.

Вопросы и задачи

1. Почему грязный, в частности покрытый копотью, снег тает быстрее, чем чистый?

2. Для чего внутренние стенки оптических приборов покрывают черной краской?

3. Почему блестит начищенный кожаный сапог?

4. Зачем картины, написанные масляными красками, часто покрывают слоем лака?

5. Что лучше рассеивает свет — наждачная или чертежная бумага?

6. Если на лист белой бумаги попадет растительное масло, то она становится прозрачной, так что через нее можно даже прочесть текст, напечатанный с другой стороны листа. Как это объяснить?

7. Почему почва, бумага, дерево, песок кажутся более темными, если они смочены водой?

8. Радиоволны отражаются от металлической крыши зеркально, а свет при отражении от этой же крыши сильно рассеивается. Отчего?

9. Для чего врачи-рентгенологи пользуются при работе перчатками, фартуками и очками, в которые введены соли свинца?

10. Почему электрические лампочки накаливания зачастую окружают матовым плафоном?

11. Как объяснить тот факт, что раскаленная нить накала лампочки имеет красный оттенок при наблюдении через матовую поверхность плафона?

12. Отчего в отсутствие облаков предметы в тени солнца, например на белом снегу, или при наступлении сумерек приобретают голубоватый цвет?

13. Снег белый и непрозрачный, хотя состоит из мелких бесцветных кристалликов льда, а чистая вода прозрачна, однако туман и облака, представляющие собой мелкие капли воды, непрозрачны. Почему?

14. Отчего в мелких местах морская вода нередко приобретает зеленый цвет?

15. Почему на фоне деревьев дым костра кажется синим, а над верхушками деревьев (на фоне светлого неба) он выглядит желтовато-красным?

16. В парниках температура заметно выше, чем у окружающего воздуха, даже в отсутствие отопления и удобрений. Как это объяснить?

17. Почему в микроволновой печи можно жарить мясо?

18. Какой цвет имеет Земля при наблюдении из космоса и почему?

19. Отчего на Луне небо черное, а на Марсе имеет красноватый оттенок?

20. Почему по мере подъема звезды над горизонтом она становится ярче?

21. Наблюдаются ли сумерки на Луне?

22. На фотографиях Луны рядом с Землей, полученных с борта межпланетных станций, Земля выглядит очень яркой, а Луна – довольно темной. Почему?

23. Отчего радиоастрономы могут проводить наблюдения ночью и днем, а астрономы-оптики – только ночью?

Микроопыт

Разотрите несколько кристалликов медного купороса в мелкий порошок. Что произойдет с цветом кристалликов? Почему?

Любопытно, что...

...для объяснения голубизны неба уже сотни лет назад выдвигалось немало гипотез. Например, ее трактовали как смешение в определенных долях «света и тьмы», допускали, что частицы воздуха окрашены в голубой цвет либо они люминесцируют под действием солнечного света. Великий поэт Гёте, проявлявший интерес к теории возникновения цветов, раскритиковал Ньютона за то, что и он не дал ответа на этот вопрос.

...Тиндаль, обнаружив поглощение инфракрасных лучей углекислым газом, поставил опыт, в котором пропускал эти лучи через трубку, заполняемую выдыхаемым воздухом. Наблюдаемое и в этом случае поглощение стало убедительным оптическим доказательством известного теперь всем факта, что человек выдыхает углекислый газ.

...с легкой руки Рэлея долгое время считалось, что рассеяние солнечных лучей происходит на молекулах газов, и только в 1940 году академик Л.И.Мандельштам преодолел это заблуждение, показав, что в действительности рассеивателями являются неоднородности плотности воздуха.

...даже сажа и платиновая чернь – наиболее черные из известных красок – не поглощают полностью все падающее на них излучение, рассеивая из него около 1–2%. Самые же лучшие белила рассевают 91% падающего на них света, а свежевыпавший снег – лишь 80%.

...при вулканических извержениях и крупных лесных пожарах атмосфера насыщается аэрозолями, состоящими из частиц таких размеров, что на них свет длинноволновой части спектра рассеивается сильнее, чем коротковолновой. При наблюдении сквозь такой аэрозоль Луна и Солнце становятся синими, что и зафиксировал русский геолог В.А.Обручев после катастрофического извержения вулкана Кракатау.

...одно из важнейших преимуществ оптоволоконной связи заключается в столь ничтожном затухании сигнала, что расстояние между ретрансляторами может достигать 100–200 километров – многократно больше, чем в обычных проводных линиях. Успехи в технологии изготовления волокон позволили вплотную подойти к теоретическому пределу потерь, обусловленную не дефектами вещества, а рэлеевским рассеянием и поглощением света атомами, из которых состоит волокно.

...несколько Нобелевских премий по физике в начале XX века были присуждены за разработку метода рентгеноструктурного анализа, благодаря которому, например, удалось расшифровать строение сложных кристаллов. Сегодня, исследуя рассеянное и поглощенное образцами рентгеновское излучение, можно детально установить химический состав вещества или наблюдать за динамическими изменениями структуры белков.

...попытки использовать связь между оптическими и акустическими явлениями предпринимались еще в XIX веке и привели к тому, что в 1880 году независимо в трех разных лабораториях – Белом, Тиндалем и Рентгеном – был открыт фотоакустический эффект, заключавшийся в преобразовании модулированного светового потока в звук.

...благодаря лазерам с перестраиваемой частотой стало возможным преобразовывать слабые инфракрасные сигналы в видимый диапазон. Это нашло применение при наблюдении за астрономическими объектами, поскольку чувствительность используемых там фотоприемников в оптическом диапазоне на несколько порядков превышает ее же в инфракрасном диапазоне.

...мелкая космическая пыль не только ослабляет доходящий до нас свет звезд, но и меняет их цвет. Сильнее всего пылью поглощаются синие лучи, что приводит к покраснению света, прошедшего через межзвездную среду.

Что читать в «Кванте» о распространении света

(публикации последних лет)

1. «Небо синее, Солнце красное» – 2003, № 1, с. 37;
2. «Угол падения равен...» – 2005, № 1, с. 31;
3. «Калейдоскоп «Кванта» – 2005, № 5, с. 32;
4. «Прогулки с физикой» – 2006, Приложение № 6, с. 117, 177;
5. «Радиоволны на земле и в космосе» – 2007, Приложение № 1, с. 61, 127;
6. «Лазер – замечательное достижение XX века» – 2007, № 3, с. 8; 2007, №4, с.2;
7. «Сюрпризы зеленого стекла» – 2007, № 5, с. 10.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 29)

ванно охотятся две кошки, могущие развивать скорость до v м/с. Все животные в каждый момент знают месторасположение друг друга. При каком наименьшем значении v кошки могут (независимо от начальных положений) гарантированно поймать мышку?

С.Токарев

19 (8–9). Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2$ делится на $a+b+c$. Докажите, что $a^5+b^5+c^5$ делится на $a+b+c$.

В.Произволов, В.Сендеров

20 (8–9). Может ли $(n-1)!$ делиться на n^{2008} для какого-нибудь целого $n>1$?

В.Сендеров

21 (8–9). Даны 9 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Известно, что среди попарных сумм a_i+a_j $(i \neq j)$ как минимум 29 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_9$ – целые.

А.Шаповалов

22 (8–9). Пусть $x, y, z \geq 0$. Докажите неравенство

$$(x+y-z)^n+(y+z-x)^n+(z+x-y)^n \geq x^n+y^n+z^n.$$

В.Произволов, В.Сендеров

23 (8–9). Докажите, что $\sqrt[n]{2} > \dfrac{2n}{2n-1}$ при целом $n>1$.

В.Сендеров

24 (8–9). Для каких x найдутся такие (не обязательно целые и не обязательно положительные) числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2008}$, что

$$x_1+x_2+\ldots+x_{2008}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{2008}}=x\,?$$

В.Сендеров

25 (8–9). К окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, проведены касательные в точках A и C, пересекающиеся в точке P. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC, M – середина стороны AC, H – ортоцентр треугольника ABC. Прямая MH пересекает A_1C_1 в точке K. Докажите, что точки P, B_1, K лежат на одной прямой.

Ю.Блинков

26 (8–9). Две окружности пересекаются в точках A и B. Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA, которая пересекает вторую окружность в точке Y. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника BXY.

Ю.Блинков

27 (8–9). В трапеции $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке O, известны основание AD, а также углы A, D и AOD. С помощью циркуля и линейки постройте эту трапецию.

Д.Калинин

28 (8–9). Двое играющих по очереди ломают палку: первый – на две части (возможно, неравные), второй – одну из получившихся частей на две, первый – одну из трех частей на две, и так далее. Выигрывает тот, кто сможет после какого-то из своих ходов выбрать из всех имеющихся частей 4 палки, длины которых образуют арифметическую прогрессию. Кто из игроков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

А.Шаповалов

29 (8–9). На клетчатую доску 100×100 выставлены короли двух цветов так, что черные не бьют белых и черных королей не больше, чем белых. Каково наибольшее возможное число черных королей?

О.Крижановский, А. Шаповалов

30* (8–9). Дан выпуклый многоугольник. Пусть r – количество способов разбить его непересекающимися диагоналями на четное число многоугольников, а n – на нечетное. Докажите, что $|r-n|=1$.

А.Клячко

31* (8–9). Докажите, что любой треугольник можно циркулем и линейкой разбить на 4 меньших треугольника так, чтобы 4 точки пересечения медиан меньших треугольников лежали на одной окружности.

А.Шаповалов

32* (8–9). Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями Ватсон и на 20% быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий – через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?

А.Шаповалов

33* (8–9). Многоугольник (не обязательно выпуклый) удалось разрезать на 2008 меньших равных многоугольников, подобных исходному. Обязательно ли исходный многоугольник – параллелограмм?

А.Шаповалов

Публикацию подготовил А.Шаповалов
Фотографии предоставил Д.Калинин