

И тележка в гору едет...

С. СЕМИКОВ

КТО ИЗ НАС НЕ МЕЧТАЛ ИМЕТЬ САНКИ, КОТОРЫЕ, СЪЕХАВ с горы, как по щучьему веленью сами бы взбирались наверх. Но, оказывается, катки, способные самостоятельно въезжать в горку, все же бывают.

Каток – это выточенный, например из оргстекла, биконус, т.е. два одинаковых конуса, сложенных основаниями, а горка – это две одинаковые скошенные рейки, ребром поставленные на стол под углом друг к другу (рис.1). В зависимости от этого угла и от угла скоса реек каток, поставленный на рейки, словно на рельсы, либо скатится, либо въедет в горку, а может и остаться на месте. Не имея опыта, трудно угадать, как именно он себя поведет.

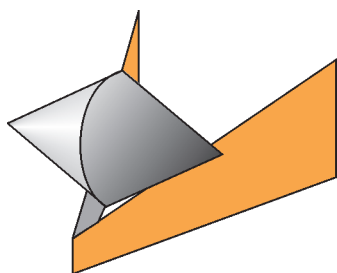


Рис. 1

Эту нехитрую установку можно собрать и дома. Каток легко сделать из двух одинаковых пластиковых бутылок, срезав у них конические верхушки, которые потом скрепляются клеем либо трубкой, пропущенной через горлышки (рис.2). А деревянные рейки можно заменить вырезанными из картона. Каток поменьше можно собрать из двух навинчивающихся наконечников от гелиевых ручек.

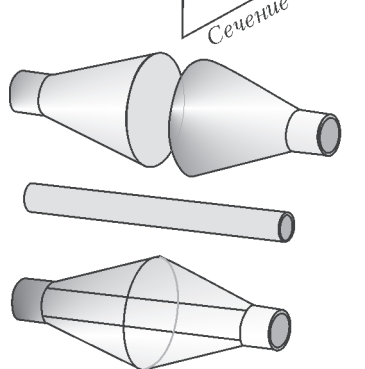


Рис. 2

Если поэкспериментировать с собранной установкой, меняя катки и углы реек, могут возникнуть два вопроса. Во-первых, почему каток способен как скатываться с горки, так и заезжать на горку? А во-вторых, как найти то переломное, критическое соотношение параметров установки, по достижении которого каток, положенный на горку, замирает?

Внимательно наблюдая за экспериментом, можно заметить, что даже если каток едет вверх по горке, он в действительности опускается. Ведь в отличие от цилиндров или санок, съезжающих с горы, у катка расстояние до опоры меняется. Так, по мере продвижения катка в гору прорез между рейками расширяется, и каток опирается на них все более узкими частями, катится по все меньшему радиусу, приближаясь осью к рейкам. В зависимости от

того, что меняется быстрее – высота реек или соответствующее ей снижение катка, каток поедет вверх или вниз. Каток всегда стремится опуститься – занять состояние с наименьшей потенциальной энергией, как сказал бы физик. Если же высота центра тяжести не меняется, т.е. поднятие по рейке компенсируется таким же опусканием катка, то он стоит на месте. Отсюда легко найти то самое критическое соотношение параметров установки.

Очевидно, что параметров, способных влиять на исход опыта, только три – угол 2α между рейками, угол β их скоса и угол γ конусности катка, составляемой образующей конуса с его осью. Если каток пройдет вдоль рейки расстояние l , точка его опоры K поднимется на $l \operatorname{tg} \beta$, при этом точки опоры катка разойдутся от его средней плоскости (от общего основания конусов) на $b = l \sin \alpha$, а радиус качения уменьшится на $b \operatorname{tg} \gamma = l \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$ (рис. 3).

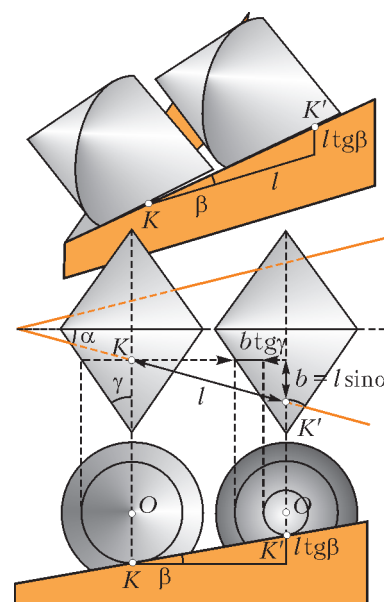


Рис. 3

Итак, поднятие опоры катка на $l \operatorname{tg} \beta$ из-за въезда в горку сопровождается его опусканием на $l \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$ из-за сближения оси O с рейкой. Если первое больше второго, то каток съезжает, если меньше – катится в гору, если же эти изменения высоты компенсируют друг друга, то высота центра катка не меняется. Иными словами, если выполнено критическое соотношение $\operatorname{tg} \beta = \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$, каток не пойдет ни вверх, ни вниз по горке – ему безразлично, куда ехать и где находиться.

Однако энергетические соображения позволяют лишь узнать исход опыта, сказать, как поведет себя каток, но не объясняют почему. Поэтому лучше рассмотреть действующие на каток силы. Ведь движение санок с горы вниз обычно объясняют не тем, что это им выгодно энергетически, а тем, что их притягивает земля. Цилиндр катится с горки не потому, что знает где «лучше», а из-за того, что действующая на него сила тяжести G создает соответствующий вращательный момент относительно точки опоры. Для цилиндра, как легко видеть, точка касания K всегда лежит по отношению к горе выше его центра тяжести O , поэтому момент относительно точки опоры направлен так, что цилиндр катится вниз (рис. 4). У катка же точка K может находиться ближе к началу горки или под центром тяжести; соответствен-

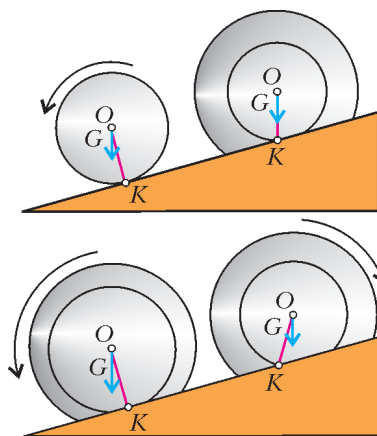


Рис. 4

но, момент направлен так, что каток поедет вверх или останется недвижим. (Это напоминает известный опыт с катушкой, которая в зависимости от угла, под которым мы тянем намотанную на нее нить, катится к нам или от нас.)

Итак, чтобы каток находился в покое, точка касания K должна лежать точно под осью O конуса, т.е. перпендикуляр KO к оси конуса должен быть вертикален. Значит, угол, образованный рейкой-касательной и прямой KO , должен быть равен $90 - \beta$. Отсюда из геометрии конуса легко прийти к тому же соотношению $\operatorname{tg} \beta = \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$, при котором каток остается неподвижен. Меняя один из углов, мы смещаем точку K . Соответственно, для биконуса горка оказывается «горизонтальной» либо наклонной «вправо» или «влево».

Теперь, когда ясен смысл критического соотношения, его можно не только проверить на практике, измерив транспортиром все углы, но и применить для видоизменения опыта. Так, становится ясно, что не обязательно использовать каток, имеющий вид биконуса типа «поплавок», т.е. конусы можно соединить не только основаниями, но и вершинами – получим биконус типа «катушка». Это будет соответствовать изменению угла γ на $-\gamma$. Значит, надо сменить и знак угла β – чтобы рейки соединялись уже не узкими, а широкими концами.

Иллюзию поднятия катка вверх по горке можно усилить, если сделать угол β большим – градусов в 45. Понятно, что одновременно надо увеличить углы α и γ , так что в итоге каток станет больше похож на две сложенные вместе тарелки. Или можно попробовать сделать опускание центра тяжести малозаметным, для чего надо предельно уменьшить угол α , чтобы рейки выглядели почти параллельными, а угол γ , напротив, сделать большим. А чтобы размер катка был не слишком велик и его конусность не бросалась в глаза, надо оставить только его концевые части, катящиеся по рейкам как колеса вагонов по рельсам. Поэтому конусные колеса должны соединяться не основаниями или вершинами, а общей осью. Если теперь присоединить проволокой пару таких колесных осей (а проще – пару простых катушек) к коробку, получится настоящая тележка-самокатка, способная ехать в гору, с которой другие предметы (цилиндры и бруски) съезжают. Такая тележка кажется чудом – столь сложно у нее заметить снижение центра масс при въезде в горку. Если же соединить колеса с тележкой жестко и смазать «рельсы», можно получить и сани, «въезжающие в гору».

Теперь можно рассмотреть и более сложные варианты. Что будет, если мы изогнем картонные рейки так, что угол

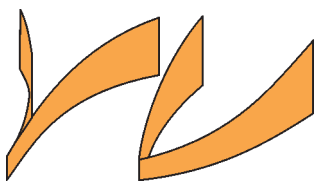


Рис. 5

α будет изменяться вдоль горки (рис.5)? Если угол α нарастает, то каток будет выше некоторой критической точки закатываться вверх, а ниже ее – спускаться вниз, т.е. будет всегда удаляться от этой точки. Если же картонные рейки постепенно сходятся и угол α уменьшается, каток будет всегда стремиться к точке с критическим углом α . Доехав до нее, он станет, как в яме, кататься туда-сюда, пока не замрет в этой точке.

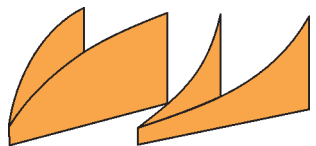


Рис. 6

Другой вариант – это когда рейки плоские (угол α постоянен), зато меняется наклон β – гора меняет наклон (рис.6). На ней тоже будет критическая точка при неко-

тором угле β , являющаяся точкой устойчивого равновесия катка, смотря по тому вогнута горка или выпукла.

Наконец, третий вариант – углы α и β постоянны, но меняется угол γ . Такое возможно, если мы используем каток не из конусов, а из других тел вращения, имеющих криволинейную образующую.

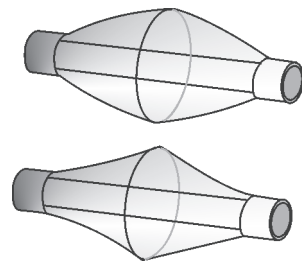


Рис. 7

Например, каток, сделанный из двух пластиковых бутылок не с конусной, а с закругленной верхушкой (рис.7). Также можно использовать вместо конических скругленные наконечники от ручек или же шарики для пинг-понга. Для каждого из таких катков есть свое определенное критическое место на горке, в точке контакта с которым угол γ равен критическому. Положенный выше этого места каток катится вверх, а ниже – вниз. Для того чтобы эта точка служила местом устойчивого равновесия, необходимо применять катки с вогнутой поверхностью.

Возможны и сложные комбинации всех трех вариантов.

Но может ли все это иметь практическое применение? Нельзя ли, к примеру, построить железную дорогу, идущую «под гору» в обе стороны, чтобы поезд сам по себе, без затрат энергии, мог доехать туда и обратно? Казалось бы, достаточно уложить рельсы наподобие наклонных расходящихся реек и сделать поезду два комплекта колес – одни с углом γ , большим критического, другие – с меньшим. Доехал поезд до конечной станции, сменили ему колеса, и он сам пойдет назад. А как доедет, ему снова сменят колеса, и он тронется в обратный путь.

Конечно, такой поезд, сам идущий в оба конца, невозможен, как и любой вечный двигатель. Это ясно из энергетических соображений. Раз центр масс всегда опускается, то, чтобы поезд сам шел туда и обратно, на конечных станциях придется либо поднимать его, затрачивая при этом энергию, либо уменьшать размеры колес, пока они не станут нулевыми.

Так что каких чудо-паровозов и едущих в гору тележек ни выдумывай, все равно обнаружится какой-нибудь обман.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

seemat.ru

Механический генератор

В. ДРОЗДОВ

ВО МНОГИХ ЗАДАЧНИКАХ ПО ФИЗИКЕ МОЖНО ВСТРЕТИТЬ такую задачу: «Сплошной металлический цилиндр радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найдите зависимость напряженности электрического поля от расстояния r до оси цилиндра и разность потенциалов между поверхностью цилиндра и его осью».

Сначала приведем решение этой задачи в общем виде. Поскольку внутри металлического цилиндра имеются свободные электроны, при его вращении они будут отбрасываться к краям цилиндра. В результате вблизи оси концентрация электронов понизится, а на краях – повысится, т.е. внутри цилиндра возникнет электрическое поле, направленное от оси к периферии. Равновесие установится тогда, когда образовавшееся поле E будет в состоянии подействовать на каждый электрон с такой силой, чтобы он двигался по

окружности с угловой скоростью ω .

Пусть некий электрон движется по окружности радиусом r , $0 < r < R$ (рис. 1). Тогда по второму закону Ньютона имеем

$$m\omega^2 r = Ee,$$

где m – масса, e – заряд электрона. Отсюда находим

$$E = \frac{m\omega^2}{e} r.$$

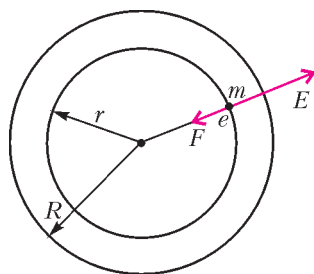


Рис. 1

Понятно, что векторы силы \vec{F} , действующей на электрон, и напряженности электрического поля \vec{E} направлены противоположно.

Видим, что возникшее электрическое поле неоднородно, оно растет пропорционально расстоянию r от оси цилиндра.

Так как вектор \vec{E} всегда направлен в сторону уменьшения потенциала, то потенциал ϕ_1 на оси цилиндра больше потенциала ϕ_2 на его поверхности. При этом искомая величина $\phi_1 - \phi_2$ численно равна заштрихованной «площади» под графиком зависимости $E(r)$, изображенным на рисунке 2:

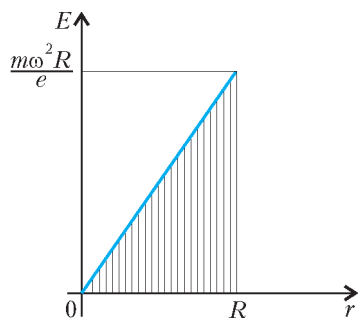


Рис. 2

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_2 &= \frac{1}{2} R \cdot E(R) = \\ &= \frac{1}{2} R \cdot \frac{m\omega^2 R}{e} = \frac{m\omega^2 R^2}{2e}. \end{aligned}$$

Задача в общем виде решена. Однако конечной целью физических расчетов является число. Интересно оценить порядок величины максимальной электрической мощности, возникающей при вращении цилиндра, фактически

являющегося механическим генератором электроэнергии.

В формуле для разности потенциалов введем для удобства удельный заряд электрона $e/m = \gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг и учтем, что $\omega R = v$ – это линейная скорость точек поверхности цилиндра. Тогда получим

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{v^2}{2\gamma}.$$

Оценим максимально возможную величину скорости v , используя соображения размерностей. Ясно, что она зависит от предела прочности материала цилиндра σ и от его плотности D . Запишем это так:

$$v \sim \sigma^\alpha \cdot D^\beta.$$

Выпишем единицы измерения всех величин:

$$[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}, [\sigma] = \text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}, [D] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}.$$

Так как обе части формулы для v измеряются в одних и тех же единицах, приходим к равенству

$$\text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \text{кг}^\alpha \cdot \text{м}^{-\alpha} \cdot \text{с}^{-2\alpha} \cdot \text{кг}^\beta \cdot \text{м}^{-3\beta},$$

или

$$\text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \text{м}^{-\alpha-3\beta} \cdot \text{с}^{-2\alpha} \cdot \text{кг}^{\alpha+\beta}.$$

Для определения α и β получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\alpha - 3\beta = 1, \\ -2\alpha = -1, \\ \alpha + \beta = 0, \end{cases}$$

из которой находим

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

Теперь формула для скорости принимает вид

$$v \sim \sqrt{\frac{\sigma}{D}},$$

а формула для разности потенциалов выглядит так:

$$\phi_1 - \phi_2 \sim \frac{\sigma}{\gamma D}.$$

Вспомним формулу электрического сопротивления R_3 провода длиной l и площадью поперечного сечения S :

$$R_3 = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное сопротивление материала провода. С ее помощью оценим сопротивление R_3 нашего цилиндра. Если его высота h , то $S \sim Rh$, значит,

$$R_3 \sim \rho \frac{R}{Rh}, \text{ или } R_3 \sim \frac{\rho}{h}.$$

Выделяемая в проводнике электрическая мощность равна

$$P \sim \frac{(\phi_1 - \phi_2)^2}{R_3}.$$

С учетом предыдущих формул окончательно получаем

$$P \sim \frac{\sigma^2 h}{\gamma^2 D^2 \rho}.$$

Обратим внимание: в этой формуле радиус цилиндра R отсутствует, а присутствует фактически одна переменная – h . Остальные величины характеризуют материал цилиндра. Например, для рельсовой стали $\sigma = 7,5 \cdot 10^8$ Па, $D = 7,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho = 1,2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м. Пусть $h = 1$ см, ибо слишком высокий цилиндр будет чересчур тяжелым.

Тогда вычисления дают такой результат:

$$P \sim 24 \text{ нВт}.$$

Получили нановатты. Легко подсчитать, что механический генератор, вращающийся на пределе возможного разрушения, выработает один джоуль электроэнергии за 1,3 года.

Магнитная сила и закон электромагнитной индукции

Е. РОМИШЕВСКИЙ, А. СТАСЕНКО

Лаплас присутствовал на первой публичной демонстрации опыта Ампера. Публика уже расходилась, и Лаплас у выхода стал ждать ассистента... хлопнул его по плечу и, пристально глядя на него, спросил: «А не вы ли это, молодой человек, подталкивали провод?»

М.Льоцци. История физики

К НАСТОЯЩЕМУ ВРЕМЕНИ УЖЕ МИЛЛИАРДЫ ЛЮДЕЙ воспользовались услугами электропоездов, автомобилей, автобусов, самолетов, кораблей, электростанций и т.п., в которых неустанно вращаются роторы электромоторов и генераторов тока. В основе работы этих старательных тружеников лежат фундаментальные законы электромагнетизма, открытые замечательными учеными девятнадцатого века. Вспомним вкратце лишь о тех из них, о которых пойдет речь в этой статье.

Андре Мари Ампер (1775–1836) открыл взаимодействие электрических токов и установил соответствующий закон, разработал теорию магнетизма (1820).

Майкл Фарадей (1791–1867) в 1821 году впервые осуществил вращение магнита вокруг проводника с током, а также, наоборот, проводника с током вокруг магнита, создав, таким образом, принципиальную модель электродвигателя. В этом несложном опыте была наглядно показана связь между электрическими и магнитными явлениями. Через десять лет он уже открыл явление электромагнитной индукции – возникновение тока в замкнутом проводнике при изменении магнитного потока через контур этого проводника.

Эмилий Христианович Ленц (1804–1865) в 1833 году установил правило определения направления индукционного тока (правило Ленца).

Кстати сказать, и Ампер, и Фарадей, и Ленц были членами Петербургской Академии наук.

Хендрик Антон Лоренц (1853–1928) дал выражение для силы, действующей на движущийся заряд в электромагнитном поле (сила Лоренца). Иностраный член Академии наук СССР.

Продemonстрируем «работу» законов, открытых этими физиками, в самом простом случае поступательного движе-

ния проводника в постоянном магнитном поле. Сила Лоренца «направляет» в разные стороны движущиеся электрические заряды разных знаков, а значит, создает в пространстве кулоновские электрические поля и в проводящей среде возбуждает электрические токи, т.е. является создателем источников электрических токов.

Рассмотрим такой пример. В однородном горизонтальном магнитном поле \vec{B}_z поступательно движется вертикальный длинный проводящий стержень длиной l с постоянной скоростью $\vec{v}_x \perp \vec{B}_z$ (рис.1). (Здесь индексы удобно указывают направления соответствующих векторов в декартовой системе координат XYZ. Кружок с точкой означает, что ось Z и магнитное поле направлены к нам.) Положительные ионы (к примеру, ионы меди Cu^+) закреплены в узлах кристаллической решетки, а свободные электроны, перемещаясь вверх под действием магнитной силы Лоренца $\vec{F}_L =$

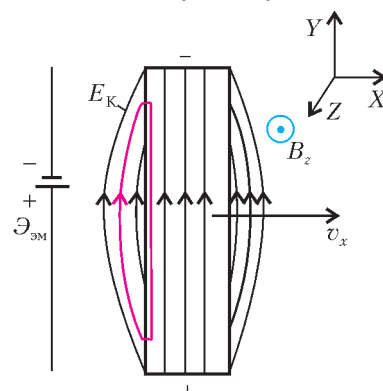


Рис. 1

$= e(\vec{v}_x \times \vec{B}_z)$, создают в объеме проводника однородное кулоновское электрическое поле $\vec{E}_K = (\vec{v}_x \times \vec{B}_z)$, уравновешивающее действие магнитной силы. (Заметим, что здесь учтен отрицательный заряд электрона, равный $-e$, где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – положительная фундаментальная константа.) В результате между концами стержня возникает постоянная разность потенциалов, равная $E_K l = v_x B_z l$. Таким образом, создается «электромагнитная батарейка» с электродвижущей силой $\mathcal{E}_{эм} = v_x B_z l$ и сторонней (т.е. не кулоновского происхождения) напряженностью.

А что это за изогнутые линии с боку от стержня? Они нарисованы для того, чтобы подчеркнуть существенное отличие кулоновского поля от сторонних полей: работа по перенесению пробного заряда в кулоновском поле по замкнутому контуру (выделен цветом) равна нулю. Заметим, что электродвижущие силы (ЭДС) и связанные с ними сторонние напряженности в своей основе опять-таки имеют электромагнитный характер, но уже другого (тоже некулоновского) рода.

Теперь используем эту «электромагнитную батарейку» для получения электрического тока и электрической энергии. Для этого будем двигать наш стержень вдоль двух параллельных горизонтальных проводников, находящихся на расстоянии l друг от друга (рис.2). Проводники

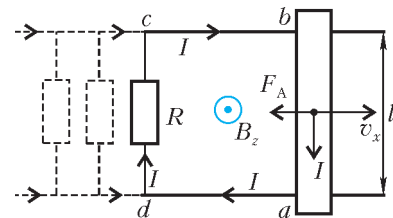


Рис. 2

замкнем на резистор сопротивлением R . Причем двигаться будет только стержень, а проводники и резистор должны быть неподвижными. (Иначе в них тоже будет создаваться «электромагнитная батарея» той же силы, что и возникающая в стержне, но противоположно «направленная», так что тока в замкнутом контуре не будет.) Тогда в замкнутом контуре $abcd$ потечет электрический ток $I = \mathcal{E}_{эм}/R$, и на сопротивлении R будет выделяться тепловая мощность I^2R .

За счет чего же выделяется тепловая энергия, и справедлив ли здесь закон сохранения энергии?

По движущемуся стержню сверху вниз течет электрический ток I . Значит, на проводник с током, находящийся в однородном магнитном поле \vec{B}_z , действует сила Ампера, направленная противоположно направлению движения стержня, т.е. вектору \vec{v}_x . Чтобы стержень сохранял постоянную скорость движения v_x , к нему необходимо приложить силу \vec{F}^* , равную по величине силе Ампера $F_A = IB_z l$, но направленную противоположно ей. При этом мощность этой силы ($N = F^* v_x = IB_z l v_x = I^2 R$) в точности равна тепловой мощности, выделяющейся на сопротивлении R , что, конечно же, неудивительно. Закон сохранения энергии верен!

Подключим теперь к параллельным проводам, по которым скользит стержень, еще один резистор сопротивлением R (см. рис.2). Тогда, если стержень по-прежнему будет двигаться со скоростью v_x , через него уже потечет электрический ток величиной $2I$. Сила Ампера увеличится в два раза, и в два раза больше станет выделяющаяся на сопротивлениях тепловая мощность. Таким образом, мы получили электрический генератор постоянного тока. Включение нескольких параллельных сопротивлений R во столько же раз увеличит силу Ампера, тормозящую стержень.

Расположим теперь параллельные проводники вертикально (рис.3), и пусть по ним скользит наш проводящий (уже горизонтальный) стержень массой m , замыкающий цепь с

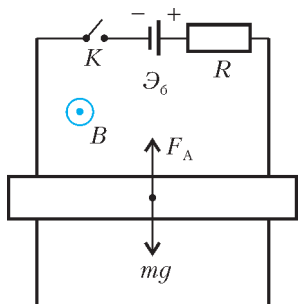


Рис. 3

резистором сопротивлением R и аккумуляторной батареей с электродвижущей силой \mathcal{E}_6 . Контур пронизывается прежним однородным горизонтальным магнитным полем \vec{B} , направленным к нам, и находится в поле тяготения Земли. (Индексы для векторов и их проекций для простоты опустим, так как мы уже разобрались, что куда направлено.) Если замкнуть ключ K и отпустить стержень, то по цепи потечет ток $I = \mathcal{E}_6/R$, направленный по часовой стрелке. Если величина \mathcal{E}_6 будет достаточно большой, то сила Ампера, действующая на стержень, будет больше силы тяжести mg , и стержень начнет двигаться вверх с начальным ускорением a , определяемым равенством

$$ma = F_A - mg.$$

Если скорость стержня v , он превращается в «электромагнитную батарею», имеющую электродвижущую силу $\mathcal{E}_{эм} = vBl$ и «действующую», по правилу Ленца, против вызывающей ее причины, т.е. против \mathcal{E}_6 . В конце концов может установиться стационарное состояние (отметим его индексом 0):

$$I_0 Bl = mg, \quad I_0 R = \mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_{эм} = \mathcal{E}_6 - v_0 Bl, \quad (*)$$

откуда получим постоянную скорость движения стержня:

$$v_0 = \frac{\mathcal{E}_6 Bl - mgR}{(Bl)^2} = \frac{\mathcal{E}_6}{Bl} \left(1 - \frac{mgR}{\mathcal{E}_6 Bl} \right).$$

Если первое равенство выражения (*) умножить на v_0 , а второе – на I_0 , мы опять получим закон сохранения энергии:

$$\mathcal{E}_6 I_0 = \mathcal{E}_{эм} I_0 + I_0^2 R = mgv_0 + I_0^2 R.$$

Видно, что мощность аккумуляторной батареи расходуется на полезную мощность поднятия груза массой m со скоростью v_0 и на выделяющуюся при этом тепловую мощность. Таким образом, на рисунке 3 фактически изображена принципиальная схема электрического мотора: ведь к нашему проводящему стержню вполне можно прикрепить, например, ведро воды, поднимаемое из колодца.

Итак, полезная (механическая) мощность нашего мотора равна

$$N_{пол} = \mathcal{E}_{эм} I_0 = \frac{\mathcal{E}_{эм} (\mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_{эм})}{R},$$

следовательно, его коэффициент полезного действия равен

$$\text{КПД} = \frac{N_{пол}}{N_{зат}} = \frac{\mathcal{E}_{эм} I_0}{\mathcal{E}_6 I_0} = \frac{\mathcal{E}_{эм}}{\mathcal{E}_6},$$

где $N_{зат}$ – полная мощность, затрачиваемая батареей. На рисунке 4 изображен график зависимости полезной мощности от $\mathcal{E}_{эм}$, в нашем случае от $\mathcal{E}_{эм} = vBl$. Это – парабола. Легко видеть, что максимальная полезная мощность мотора N_{max} достигается, когда «электромагнитная» ЭДС $\mathcal{E}_{эм}$ оказывается вдвое меньше ЭДС включенной в цепь батареи \mathcal{E}_6 .

При этом коэффициент полезного действия мотора составляет $\mathcal{E}_{эм}/\mathcal{E}_6 = 0,5$, т.е. 50%.

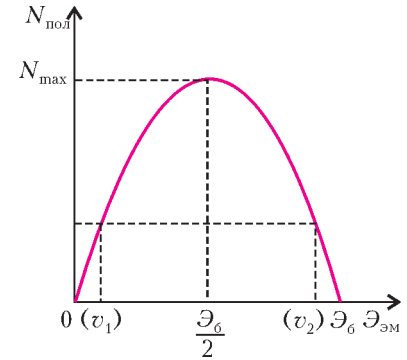


Рис. 4

Это значит, что если мы имеем электрический мотор, в цепи которого содержится батарея с ЭДС \mathcal{E}_6 и сопротивлением R , и он поднимает груз массой m , то максимальную скорость поднятия этого груза можно найти так:

$$mgv_{max} = \mathcal{E}_{эм} I_{max} = \frac{\mathcal{E}_6}{2} \frac{(\mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_6/2)}{R} = \frac{\mathcal{E}_6^2}{4R}, \quad \text{и} \quad v_{max} = \frac{\mathcal{E}_6^2}{4mgR}.$$

По графику рисунка 4 видно, что одну и ту же полезную мощность с одним и тем же мотором можно получить, поднимая быстро ($v_2 > v_1$) легкий груз или медленно – тяжелый груз. Причем поднимать быстро легкий груз значительно выгоднее, потому что коэффициент полезного действия может быть значительно больше и мотор при этом будет греться существенно меньше. Максимально возможная скорость движения бесконечно легкого груза ($mg \rightarrow 0$) достигается, когда $\mathcal{E}_{эм} = v^* Bl = \mathcal{E}_6$, при этом $I \rightarrow 0$ и КПД $\rightarrow 1$. Эту скорость $v^* = \mathcal{E}_6/(Bl)$ называют скоростью холостого хода мотора.

Вернемся снова к схеме «электромотора» (см. рис.3). Эту схему очень просто превратить в схему «генератора», поменяв полюса батареи. Если в начальный момент замкнуть ключ и отпустить стержень, то вначале сила Ампера будет направлена вниз, и стержень будет падать с ускорением, бóльшим ускорения свободного падения:

$$ma = mg + IBl.$$

Затем ток начнет уменьшаться, изменит свое направление, когда $\mathcal{E}_{эм} = vBl$ станет больше \mathcal{E}_6 , и в дальнейшем устано-

вится стационарное состояние:

$$v_{\text{уст}}Bl - \mathcal{E}_0 = I_{\text{уст}}R, \quad mg = I_{\text{уст}}Bl, \quad \text{и} \quad v_{\text{уст}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Bl} \left(1 + \frac{mgR}{\mathcal{E}_0Bl} \right).$$

При этом за счет уменьшения потенциальной энергии стержня в поле тяжести начнет заряжаться батарея и, кроме того, будет выделяться тепловая мощность на сопротивлении. На языке мощностей запишем:

$$mgv_{\text{уст}} = v_{\text{уст}}BlI_{\text{уст}} = \mathcal{E}_0I_{\text{уст}} + I_{\text{уст}}^2R.$$

Рассмотренные примеры убедительно показывают, что такие важные для человечества физические объекты, как электрические генераторы и электрические моторы, являются как бы «родственными» по линии магнитных сил Лоренца и Ампера.

Обобщим теперь полученные результаты. Вернемся к нашему начальному примеру, изображенному на рисунке 2. Параллельные провода и перемычка с резистором сопротивлением R неподвижны. Стержень длиной l движется со скоростью v_x . В данный момент времени t координата стержня равна x . Магнитный поток $\Phi(t)$ через замкнутый контур $abcd$ равен произведению индукции поля B на площадь $lx(t)$ перпендикулярной полю площадки:

$$\Phi(t) = Blx(t).$$

Заметим, что

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv_x.$$

Значит, можно записать, что

$$\mathcal{E}_{\text{эм}} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Почему стоит знак «минус»? В нашем случае магнитный поток увеличивается, так как увеличивается площадь контура $abcd$, а ток в контуре будет течь против часовой стрелки и создавать внутри контура собственное магнитное поле, по направлению противоположное магнитному полю B . Это положение и называется правилом Ленца. Нашу электромагнитную электродвижущую силу $\mathcal{E}_{\text{эм}}$ назвали *электродвижущей силой электромагнитной индукции*, а установленный опытными фактами закон

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

– законом электромагнитной индукции Фарадея.

Дальнейшее обобщение закона (это опять-таки установлено опытными фактами) говорит о том, что если поток Φ магнитного поля \vec{B} через любую поверхность, опирающуюся на замкнутый контур, зависит от времени, то в этом контуре возникает ЭДС электромагнитной индукции, определяемая законом Фарадея. Причем со временем могут изменяться (в отдельности или одновременно) форма контура, его площадь, ориентация в пространстве относительно магнитного поля \vec{B} , а также само магнитное поле $B(t)$, которое в общем случае должно складываться из внешнего магнитного поля и собственного магнитного поля, создаваемого возникающим собственным электрическим током в проводящем контуре.

Если вы запомните предыдущий абзац, то прослывете в школе большим знатоком физики. Чего вам и желаем.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Как шарик о плиту ударился

А. СТАСЕНКО

«Что же тут особенного? – скажет Отличник. – Будем считать удар абсолютно упругим...»

С этого и начнем. Что такое *удар*? И что значит *абсолютно упругий*?

Удар понимают обычно как нечто мгновенное; предполагается, что он приводит к бесконечно быстрому изменению скоростей соударяющихся тел. В частности, при нормальном столкновении шарика с массивной плитой происходит, как сказал бы математик, скачок или разрыв нормальной составляющей скорости: $\Delta v_n = v_{2n} - v_{1n}$. Но поскольку шарик обладает конечной массой m , такой скачок скорости потребовал бы бесконечно большой нормальной силы: $F_n \rightarrow \infty$, которая за бесконечно малый промежуток времени: $\tau \rightarrow 0$ должна привести к конечному приращению импульса:

$$m\Delta v_n = F_n \cdot \tau (= \infty \cdot 0). \quad (1)$$

По сути дела, при этом не интересуются тем, что происходит в течение времени столкновения τ , – важно только то, что

получилось в конце этого процесса. Так что это время может и не быть равным нулю; «мгновенность» удара можно понимать как малость времени τ по сравнению с каким-то другим «большим» отрезком времени, например временем подъема шарика в поле тяжести на высоту h после отскока:

$$\tau \ll \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Но тогда и сила F_n не должна быть бесконечно большой – важно лишь приращение импульса. Кроме того, поскольку удар – это уже *процесс*, длящийся конечное время τ , «внутри» которого сила F_n может как-то изменяться, то можно ввести ее среднее значение $\langle F_n \rangle$ такое, что его произведение на время удара в точности равно тому же приращению импульса (1):

$$m\Delta v_n = \langle F_n \rangle \cdot \tau. \quad (1')$$

А что значит – абсолютно упругий? Это значит, что после соударения кинетическая энергия отскочившего шарика осталась в точности такой же, как до удара (масса плиты считается бесконечно большой). Значит, нормальная составляющая скорости изменит только знак: $v_{2n} = -v_{1n}$. Конечно, это идеализированная модель – где же найти такую плиту и такой шарик, который после падения с высоты h отскочил бы на ту же высоту?

Что же происходит на самом деле при столкновении? Представим себе *упругое* тело массой m в виде двух *жестких* частей массой $m/2$ каждая, скрепленных невесомой пружиной жесткостью k (рис.1). Пусть это составное тело нормально падает на абсолютно жесткую плиту со скоростью

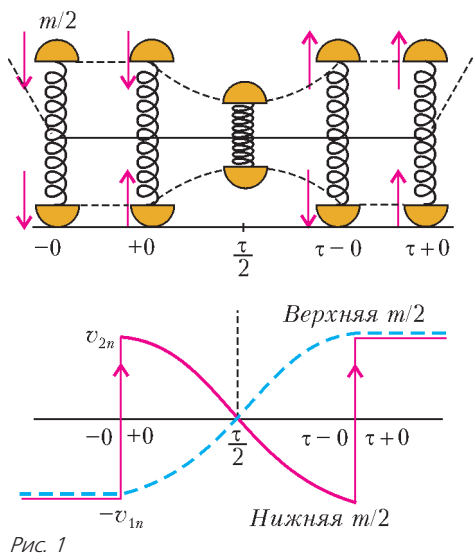


Рис. 1

v_{1n} . В момент времени $t = -0$ нижняя половина приходит в соприкосновение с плитой. Припишем этой половине свойство «абсолютно упруго отражаться» от плиты. Это значит, что в следующее мгновение $t = +0$ нижняя половина изменит знак скорости на противоположный: $v_{2n} = -v_{1n}$, а верхняя половина пока что ничего об этом «не знает» и продолжает двигаться вниз с прежней скоростью $-v_{1n}$. Но поскольку теперь обе половины движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю, но противоположно направленными скоростями, пружина начнет сжиматься, и в некоторый момент времени, обозначим его $\tau/2$, обе половины на мгновение остановятся. Затем пружина начнет их расталкивать и в момент времени $t = \tau - 0$ полностью распрямится, ее расталкивающая сила исчезнет. В то же мгновение «абсолютно жесткая» нижняя половина тела вторично «абсолютно упруго» отразится от «абсолютно жесткой» плиты и в момент времени $t = \tau + 0$ приобретет ту же скорость, что и до соударения, но теперь направленную вверх. А эту же скорость уже имеет и верхняя половина. Таким образом, наше двухполовинное тело станет двигаться вверх, не потеряв ничего из своей первоначальной кинетической энергии.

На рисунке 1 штрихами показано, что траектория тела, подлетающего к плите и отразившегося от нее, может быть криволинейной (например, параболой), но в масштабе времени взаимодействия τ это искривление совершенно незначительно, а сила тяжести mg пренебрежимо мала по сравнению с нормальной силой, вызывающей скачок скорости при соприкосновении с плитой. Заметим, что центр масс этого двойного тела неподвижен во все время столкновения ($0 < t < \tau$).

Итак, через конечный промежуток времени порядка периода колебаний этого устройства $\sqrt{\frac{m}{2k}}$ оно отскочит от плиты со скоростью, равной по модулю скорости падения.

А еще более сложное тело – упругий шарик – можно представить в виде множества малых масс, соединенных пружинками. При ударе от места контакта по шарик побегит волна деформации, которая, пройдя его диаметр, отразится в противоположную сторону и, вновь пройдя расстояние, равное диаметру, дойдет до места контакта. Тут-то шарик и отскочит от плиты. Впрочем, и плиту точно так же можно представить состоящей из множества масс (атомов, ионов кристаллической решетки), соединенных «пружинками», обеспечивающими упругость твердого тела (которое теперь уже нельзя назвать абсолютно жестким). И в этом теле тоже побегит волна, унося с собой часть кинети-

ческой энергии шарика. Значит, его скорость после соударения обязательно станет меньше скорости падения.

Но что это мы до сих пор говорим только о нормальном соударении? Ведь тело может падать под любым углом к плоскости, и тогда его скорость в момент соприкосновения может иметь составляющую, направленную вдоль плоскости, или касательную составляющую, или тангенциальную составляющую – кому как нравится, но в любом случае мы будем ее отмечать индексом s .

Пусть в какой-то момент происходит соударение круглого тела (шарика, цилиндра или обруча) с твердой поверхностью. Ситуация совсем не редкая. Например, на соревнованиях по художественной гимнастике можно наблюдать, как Гимнастка отбрасывает в сторону обруч, закрутив его так, что, проскользив некоторое расстояние, но не потеряв полностью вращения, он сам возвращается к хозяйке. Значит, за время скольжения τ_s трение полностью «съело» первоначальный тангенциальный импульс обруча mv_{1s} , после чего началось чистое качение, но поступательная скорость обруча сменила знак. На рисунке 2 условно изображены изменения со временем силы F_s , угловой скорости обруча ω и его поступательной скорости v_s . Конечно, этот пример по-настоящему нельзя назвать соударением – здесь процесс развивается довольно долго, так что зрители успевают полюбоваться еще несколькими движениями Гимнастки.

А вот другой пример: тяжелый авиалайнер садится на взлетно-посадочную полосу, и из-под его шасси летят пыль и дым – буквально дым! – горят покрышки колес, если еще до касания земли не позаботиться раскрутить эти сотни килограммов до нужной скорости. Какой? Такой, чтобы уже в момент касания соблюдалось условие качения

$$\omega_1 = \frac{-v_{1s}}{r},$$

где r – радиус колеса (это условие должно быть соблюдено для любого круглого тела – обода, диска, шара).

Но вернемся к шарик. На рисунке 3 изображены последовательные стадии его взаимодействия с плитой, начиная с момента падения под углом, определяемым условием

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-v_{1n}}{v_{1s}}.$$

Показаны скольжение в течение времени τ_s , последующее качение в течение времени $\tau - \tau_s$ и, наконец, отскок в момент времени $\tau + 0$. Изображен случай, когда время скольжения τ_s меньше времени соприкосновения τ . В частном случае они могут и совпадать.

Следует обратить внимание на знаки величин. Скорость вращения ω считается положительной, если вращение происходит против часовой стрелки. (Математик сказал бы, что векторы, направленные вдоль осей s, n, ω , образуют *правую тройку векторов*.)

На рисунке 3 зависимости составляющих силы взаимодействия F_n и F_s от времени изображены произвольными

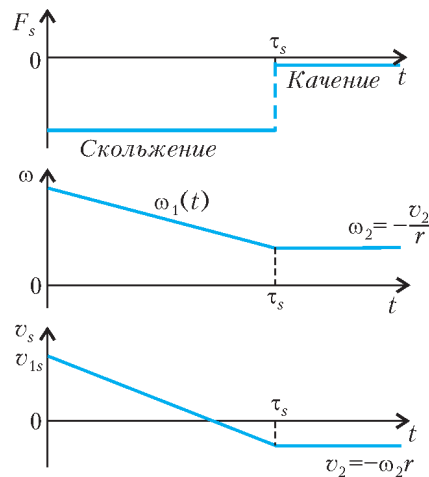


Рис. 2

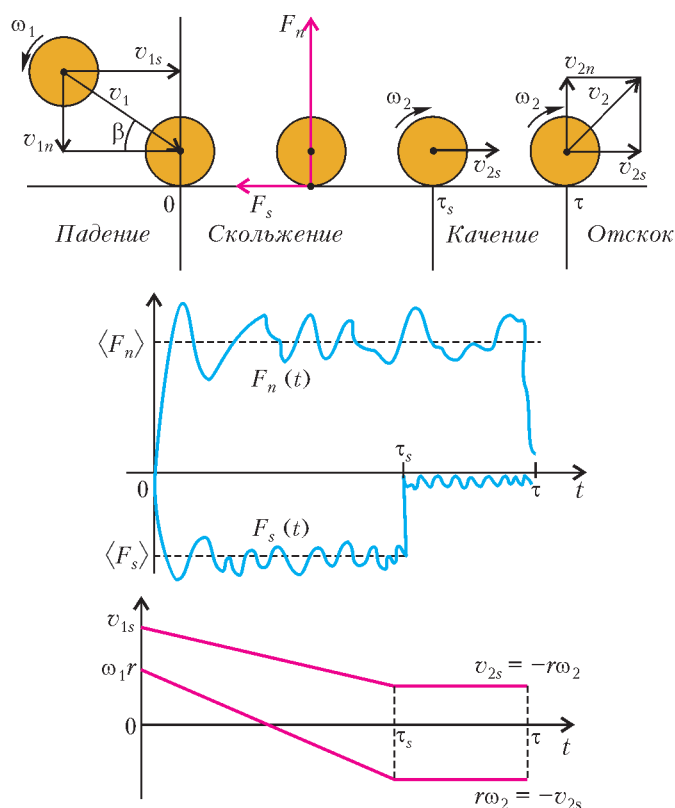


Рис. 3

волнистыми линиями. Мы не интересуемся точным «устройством» этих зависимостей. Нас интересует конечный импульс сил $\langle F_n \rangle \tau$ и $\langle F_s \rangle \tau_s$, где в угловых скобках показаны средние значения сил.

Поскольку шарик не есть точка, а имеет конечный размер, тангенциальная сила (коль скоро она направлена влево) создает крутящий момент, направленный по часовой стрелке и равный $rF_s(t)$. Подобно тому как в поступательном движении в течение времени скольжения происходит изменение тангенциального импульса на величину $\langle F_s \rangle \tau_s$, во вращательном движении произойдет изменение... чего? – момента импульса на величину $r \langle F_s \rangle \tau_s$, т.е. на величину момента импульса силы.

Но напишем, наконец, уравнения:

$$m(v_{2n} - v_{1n}) = (\langle F_n \rangle + mg)\tau, \quad (2)$$

$$m(v_{2s} - v_{1s}) = \langle F_s \rangle \tau_s, \quad (3)$$

$$J(\omega_2 - \omega_1) = r \langle F_s \rangle \tau_s. \quad (4)$$

Их смысл прост: в результате столкновения произошли изменения нормального и тангенциального импульсов шарика, и эти изменения равны импульсам соответствующих сил. Кроме того, произошло изменение угловой скорости. При этом коэффициент J – момент инерции – описывает инертность тела во вращательном движении, подобно тому как m – масса – характеризует инертность в поступательном движении.

Тут надо сказать еще несколько слов. В круглом теле радиусом r его массу можно распределить по-разному. Можно разместить массу на одном и том же расстоянии r от центра. Тогда получим обруч, для которого $J = mr^2$. Можно «размазать» ее по диску, и тогда получим $J = \frac{1}{2}mr^2$. Можно распределить ее равномерно по сфере (как у шарика для пинг-понга), тогда $J = \frac{2}{3}mr^2$. А если заполнить массой

внутренность сферы (т.е. сделать шар), то $J = \frac{2}{5}mr^2$. Вводя безразмерную величину $\gamma = J/mr^2$, получим: для обруча $\gamma = 1$, для сферы $\gamma = \frac{2}{3}$, для диска $\gamma = \frac{1}{2}$, для шара $\gamma = \frac{2}{5}$. Таким образом, из названных тел обруч труднее всего раскрутить до заданной угловой скорости, а шарик – легче всего (при одинаковых значениях массы и радиуса). Им-то мы и интересуемся прежде всего.

Далее, в уравнении (2) на всякий случай учтена и сила тяжести падающего тела – на тот случай, когда она окажется единственной прижимающей силой (Гимнастка с обручем или колесо авиалайнера). Напомним, что при ударе $\langle F_n \rangle \gg mg$, и силой тяжести можно пренебречь.

К записанной системе уравнений Теоретик и Экспериментатор отнесутся по-разному.

Теоретик будет рассуждать так. Пусть заданы все параметры до столкновения (индекс 1): v_{1n}, v_{1s}, ω_1 и характер взаимодействия тел: коэффициент трения μ . Требуется найти параметры после отскока v_{2n}, v_{2s} и ω_2 , составляющие силы $\langle F_n \rangle$ и $\langle F_s \rangle$, время соударения τ и время скольжения τ_s – семь величин. Следовательно, нужны еще какие-то соотношения для замыкания системы уравнений (2)–(4).

Прежде всего можно воспользоваться законом Кулона–Амонтона

$$\langle F_s \rangle = -\mu \langle F_n \rangle$$

(предполагается, что в течение всего времени скольжения тангенциальная сила пропорциональна нормальной). Далее, для времени соударения можно принять оценку

$$\tau \sim 4r \left(\frac{1}{c_{ш}} + \frac{1}{c_{п}} \right),$$

где $c_{ш}$ и $c_{п}$ – скорости звука в материалах шарика и плиты. Чем жестче материал, тем больше скорость звука в нем. Например, для стали она порядка 5000 м/с, а для свинца ~ 1000 м/с. Таким образом, если плита «абсолютно жесткая» и скорость звука в ней бесконечно велика, то время соударения будет определяться временем прохождения волны возмущения диаметра шарика $2r$ «туда и обратно». А если плита «абсолютно мягкая» (например, из пластилина), то $c_{п} \rightarrow 0$, и шарик никуда не отскочит ($\tau \rightarrow \infty$).

Итак, для определения семи неизвестных имеется всего пять соотношений. Задача все еще не замкнута. Что же делать? Строго говоря, нужно решить сложную проблему нестационарной деформации двух взаимодействующих тел – шарика и плиты, в объеме которой и по поверхности которой при ударе побегут волны, уносящие часть начальной кинетической энергии шарика. Но для этого нужно знать теорию упругости и численные методы математической физики.

Поэтому обратимся к Экспериментатору. На опыте довольно просто можно измерить составляющие скорости $v_{1n}, v_{1s}, v_{2n}, v_{2s}$ при помощи кино съемки или освещая частицу стробоскопическими вспышками. Это так называемый времяпролетный метод. Результаты эксперимента обычно представляются в виде зависимостей от угла падения отношений составляющих скорости после и до падения – так называемых коэффициентов восстановления нормальной и тангенциальной составляющих импульса

$$a_n = \frac{v_{2n}}{-v_{1n}} \quad \text{и} \quad a_s = \frac{v_{2s}}{v_{1s}}.$$

Видно, что первый из них всегда неотрицателен, так как v_{1n} всегда неположительна; второй же может иметь любой знак (например, быть отрицательным в случае Гимнастки с обру-

чем) или быть равным нулю (тогда предварительно закрученное тело отскочит вертикально вверх, так как его тангенциальный импульс будет полностью «съеден» трением).

Эксперименты показывают, что обе эти величины зависят от угла скольжения β . На рисунке 4, а качественно изображен характерный вид этих зависимостей, а вертикальные отрезки показывают, что всякий честный эксперимент дает

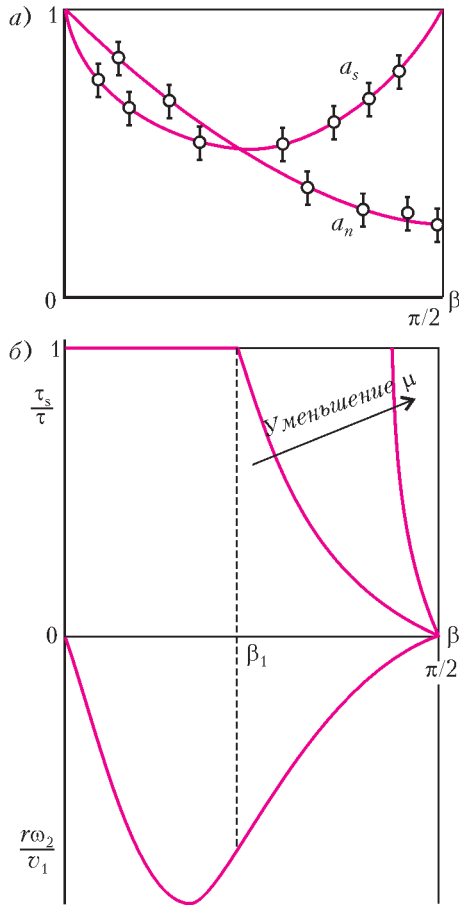


Рис. 4

разброс результатов измерений, зависящий от многих причин (шероховатости плиты, несферичности «шарика», несовершенства измерительного прибора, ..., настройки Экспериментатора). Хотелось бы измерить и угловые скорости ω_1 и ω_2 . Конечно, это можно сделать, например, в случае футбольного мяча, шарика для пинг-понга или для миллиметровых шариков, на которых есть какие-то метки (тут уж нужна будет фото- или киносъемка). Но если частицы имеют микронные размеры? Например, частицы запыленной атмосферы, в которой движется самолет или спускаемый космический корабль?

Разумеется, кое-что можно сказать об угловой скорости и по результатам измерения линейной скорости. Например, из рисунка 4,а видно, что в этих экспериментах падающие шарики не вращались до соударения с поверхностью ($\omega_1 = 0$) – иначе величина a_s была бы больше или меньше единицы или даже отрицательна.

Итак, пусть измерены $v_{1n}, v_{1s}, v_{2n}, v_{2s}$ в функции угла скольжения β . (Желательно, конечно, чтобы и в зависимости от ω_1 , потому что, если шарикун придется вторично столкнуться с плитой, он окажется уже закрученным после первого столкновения. Но это нелегко сделать для микрочастиц.) Нужно найти $\omega_2, \langle F_n \rangle, \langle F_s \rangle, \tau, \tau_s$ – теперь уже пять величин, в отличие от случая с Теоретиком.

Перепишем уравнения (2)–(4), используя введенные коэффициенты восстановления (здесь силу тяжести учитывать не будем):

$$-v_{1n}(1+a_n) = \frac{\langle F_n \rangle}{m} \tau, \quad (2')$$

$$v_{1s}(1-a_s) = -v_{1n}(1+a_n) \frac{\tau_s}{\tau} \mu, \quad (3')$$

$$\omega_2 - \omega_1 = -\frac{1}{\gamma} \frac{v_{2s}}{r} \frac{1-a_s}{a_s}. \quad (4')$$

Помня, что нормальная составляющая скорости падающего тела v_{1n} всегда отрицательна в выбранной системе координат, при ней сохранен знак «минус» (так что $-v_{1n} \geq 0$).

Из (3') можно получить относительное время скольжения:

$$\frac{\tau_s}{\tau} = \frac{v_{1s}}{-v_{1n} \mu} \frac{1-a_s}{1+a_n}.$$

Конечно, оно является функцией угла β , но в любом случае не должно превосходить единицу ($\tau_s \leq \tau$) – не может шарик скользить дольше, чем длится его контакт с плитой!

Правая часть уравнения (4') – тоже известная функция β , следовательно, это уравнение даст приращение угловой скорости $\omega_2 - \omega_1$. Впрочем, если результаты измерений таковы, как на рисунке 4,а, т.е. $a_s \rightarrow 1$ при $\beta \rightarrow \pi/2$, то угловая скорость падающего шарика заведомо равна нулю ($\omega_1 = 0$) – он не вращается перед столкновением. Тогда

$$\omega_2 = -\frac{mr^2}{J} \frac{v_{2s}}{r} \frac{1-a_s}{a_s}.$$

А в конце участка скольжения имеем

$$\omega_2 = -\frac{v_{2s}}{r}.$$

Отсюда

$$\frac{1-a_s}{a_s} = \frac{J}{mr^2} = \gamma, \quad a_s = \frac{1}{1+\gamma}.$$

Для шарика $\gamma = \frac{2}{5}$, так что $a_s = \frac{5}{7}$. Интересно, что высота бортика бильярдного стола делается равной $\frac{7}{5}$ от радиуса шара – это ли не практическое применение законов физики!

Если $\tau_s = \tau$, то из (3') и (4') можно найти соответствующий коэффициент трения, обеспечивающий это условие:

$$\mu_* = \frac{\gamma(\omega_1 r + v_{1s})}{(\gamma+1)(v_{2n} - v_{1n})}.$$

Отсюда видно, что при $\mu_* = 0$ (совсем нет трения) должно выполняться условие $\omega_1 = -\frac{v_{1s}}{r}$, или $\omega_2 = \omega_1, v_{2s} = v_{1s}, a_s = 1$. Вот почему и нужно раскручивать колеса шасси авиалайнера перед посадкой. И вот почему водитель автомобиля, въехав на лед, должен не тормозить и не разгоняться, а сидеть тихо.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть для некоторой пары веществ шарика и плиты экспериментальные данные рисунка 4,а можно аппроксимировать простыми зависимостями

$$a_n = 1 - \frac{3}{4} \sin \beta, \quad a_s = 1 - \frac{1}{2} \sin 2\beta.$$

Тогда получим

$$\frac{\tau_s}{\tau} = \frac{\cos^2 \beta}{\mu \left(2 - \frac{3}{4} \sin \beta \right)} \leq 1.$$

Отсюда видно, что условие совпадения времени скольжения со временем соприкосновения достигается с уменьшением μ при все большем угле β . Далее, из (4') найдем

$$\frac{r\omega_2}{v_1} = -\frac{\sin\beta \cdot \cos^2\beta}{\gamma}, \text{ где } \gamma = \frac{2}{5}.$$

Эти величины качественно показаны на рисунке 4,б. Видно, например, что угловая скорость останется равной нулю в двух случаях: когда $\beta = 0$ (скользящий удар, когда нет прижимающей силы) и когда $\beta = \pi/2$ (нормальное падение, когда нет начальной тангенциальной составляющей скорости).

И тут масса других вопросов возникла в голове Отличника. Ведь уже рисунок 1 содержит намек на то, что для отскока шарика или сам шарик, или плита, или оба этих тела должны деформироваться в процессе взаимодействия. Значит, плечо тангенциальной силы, которое раньше принималось равным

радиусу шарика r , теперь должно быть величиной переменной в процессе взаимодействия. А если падает не однородный шар, а шарик для пинг-понга или теннисный мяч, у которых оболочка и воздушное наполнение обладают различными значениями плотности, модуля упругости и т.п.?

А если падающий «шарик» обладает не совсем сферической поверхностью и плита не совсем плоская, а шероховатая, да еще и волнистая? А если деформации не совсем упругие, а пластические? А если в процессе трения происходит разделение электрических зарядов? А если столкновение происходит в воздухе, который надо успеть вытеснить из области между сближающимися телами, а он тоже обладает инертностью? А если...

«Э, брат, – подумал Отличник, – чтобы во всем этом разобраться, нужно поступить в Московский физико-технический институт, а потом защитить диссертацию на эту тему». И он был прав.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Два Тюремщика

И. АКУЛИЧ, В. ЛЕЦКО

*Не найдешь – кого винить? –
Я должен тебя казнить.
Государственное дело!
Ты улавливаешь нить?*

Леонид Филатов

ПРЕЗИДЕНТ АНЧУРИИ МИРАФЛОРЕС, ЗАНЯВ СВОЙ ВЫСОКИЙ пост, первым делом открыл две тюрьмы на 100 посадочных мест каждая. Почему две, а не одну двойной вместимости? Потому что он был сторонником рыночных реформ и считал, что между начальниками этих тюрем (с незатейливыми фамилиями Блэк и Уайт) разовьется здоровая свободная конкуренция, результатом которой будет прогресс и процветание указанных пенитенциарных учреждений. Увы! Слово «свободная» плохо применимо к заведениям такого рода, и вместо рыночной конкуренции развилось социалистическое соревнование, следствием чего явилось стопроцентное заполнение обеих тюрем в кратчайшие сроки.

Результат не заставил себя ждать: оставшаяся на свободе оппозиция, пронюхав, что сажать ее уже некуда, обнаглела донельзя и принялась организовывать массовые мероприятия под надуманными лозунгами (марши пустых кастрюль, сковородок и прочего кухонного инвентаря). Чтобы не допустить национальной катастрофы, президент приказал начальникам освободить тюрьмы: либо выгнать, либо казнить всех в них находящихся.

– Лучше, конечно, казнить, – дал он ненавязчивую рекомендацию, – но чтобы все было *по справедливости*. Я не хочу обвинений в немотивированной жестокости. Устройте им

какое-нибудь испытание (как говорят современные игроки-компьютерщики, квест). Не пройдет – кого винить? Только их самих...

И вот начальники тюрем собрались, чтобы обсудить ситуацию и поискать выход.

– Президент ясно дал понять: испытание должно практически гарантированно привести к казни заключенных, но внешне не выглядеть непреодолимым, – задумчиво произнес Уайт. – Что же нам изобрести?

– Идея! – заявил Блэк. – Пусть ищут... самих себя!

– Это как? – не понял Уайт.

– А вот как. Заготовлю сто записок с фамилиями всех заключенных (по одной фамилии на записке) и сто пронумерованных коробок. Перетасую записки, как колоду карт, и положу по одной в каждую коробку. Все эти коробки помещу в отдельную комнату – и милости просим! Пусть они по очереди входят и открывают в любом порядке 99 коробок – т.е. все, кроме одной. И если *каждый* из них сумеет открыть коробку со своей фамилией – то я всех отпущу. Если же *хотя бы один* не найдет себя – то всех казнь! Разумеется, после выхода каждого узника из комнаты все открытые им коробки будут закрыты обратно. Ну, и проследим, чтобы они не сумели оставить каких-нибудь пометок и тому подобное.

– Но это ведь все равно, что просто отпустить заключенных на волю без всякого испытания! – воскликнул Уайт. – Я не силен в математике, но даже для меня очевидно, что вероятность не найти своей фамилии всего 0,01.

– Это доказывает, что моя идея хороша! Испытание выглядит совсем легким. На самом же деле шансы узников не слишком велики. Вероятность того, что найти «свою коробку» удастся *всем*, равна $0,99^{100}$, а это не так много.

– В самом деле? Ну-ка, где калькулятор...

– Можно и без него. Обратите внимание:

$0,99^{100} = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100}$, а эта величина, как и вообще значение $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ при достаточно больших n , довольно близка к $1/e$, где $e = 2,718...$ – число Эйлера. Поэтому вероятность выжить для них равна $1/2,718... \approx 0,368$ – заметно меньше половины.

– И все же риск слишком велик! – засомневался осторожный Уайт. – Боюсь, если нам придется выпустить заключен-

ных, мы с вами будем первыми кандидатами на освободившиеся места.

– Пожалуй, вы правы, – согласился Блэк. – Тогда разрешим открывать не по 99, а по 90 коробок. Вероятность того, что все 100 человек найдут себя, составляет $0,9^{100}$, а это ой как мало – меньше 0,00003. Пожалуй, я даже дам им возможность пообщаться между собой. Пусть все видят, какой я гуманный! Разумеется, общаться они будут только до начала испытания.

– А вдруг они придумают какую-нибудь хитрую стратегию?

– А что они могут придумать?! Допустим, изобретут стратегию, при которой какую-то коробку так ни разу никто и не откроет. Тогда их шансы из призрачных станут нулевыми – ведь узник, фамилия которого содержится в этой неоткрытой коробке, до своей фамилии так и не докопается! Поэтому самое выгодное для них – открывать коробки «равномерно-размазанно», чтобы каждая была открыта по 90 раз. Но и эта стратегия не может существенно увеличить шансы заключенных. Давайте-ка оценим, каковы будут шансы на успешное прохождение испытания, скажем, всего двумя первыми узниками в зависимости от разных стратегий.

– А как это сделать?

– Очень просто! Поскольку первый открывает 90 коробок из 100, его шанс найти записку со своей фамилией при любой стратегии будет равен 0,9. Если второй узник откроет те же коробки, что и первый, вероятность того, что оба они выдержат испытание, будет равна $\frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} = \frac{89}{110}$. Это чуть-чуть меньше 0,81 (вероятности успеха при открывании коробок без предварительной договоренности). Предположим теперь, что второй узник среди своих 90 откроет 10 коробок, которые не открывал его предшественник. Для нахождения вероятности успеха при такой стратегии нам придется рассмотреть два случая. Допустим сначала, что коробка с фамилией первого узника не попала в число тех 90, которые открывает второй. Вероятность этого события равна $\frac{10}{90}$, а шансы на успех второго заключенного в этом случае равны $\frac{90}{99}$. С вероятностью $\frac{80}{90}$ коробка с фамилией первого узника попадет в число коробок, открываемых вторым. В этом случае вероятность успеха второго заключенного равна $\frac{89}{99}$. Учитывая, что шансы первого узника на успех $\frac{90}{100}$, окончательно получаем, что вероятность обнаружения «своих коробок» обоими заключенными равна $\frac{90}{100} \cdot \left(\frac{10}{90} \cdot \frac{90}{99} + \frac{80}{90} \cdot \frac{89}{99} \right) = \frac{401}{495}$. Это, конечно, больше, чем 0,81, но незначительно – всего-то на $\frac{1}{9900}$. Поэтому и при самой оптимальной стратегии узникам ничего не светит! При остальных стратегиях вероятность, естественно, будет лежать в диапазоне между двумя найденными значениями.

– Я восхищен вашими познаниями в математике, коллега!

– Ничего удивительного – в систему исполнения наказаний я попал случайно, а образование у меня математическое. Вот оно и пригодилось.

На следующий день узники тюрьмы Блэка начали игру. Испытание проходило в присутствии бдительной охраны, представителей прессы и наблюдателей от оппозиции (президент Мирафлорес не хотел, чтобы его обвинили в подтачке). Разумеется, здесь же были Блэк и Уайт.

Узники один за другим заходили в комнату и, открывая коробки в каком-то замысловатом порядке, рано или поздно находили записку со своей фамилией.

Блэк был спокоен и даже улыбался.

– То, что несколько человек, скорее всего, найдут «свои коробки», мне было очевидно заранее. Но шансы их по-прежнему мизерны, – шепнул он Уайту.

Когда число узников, успешно прошедших испытание, перевалило за второй десяток, улыбка Блэка стала натянутой. По мере того, как число «везунчиков» приближалось к сотне, Блэк темнел, как грозовая туча. К тому моменту, когда последний узник успешно прошел испытание, его лицо полностью соответствовало фамилии.

– Невероятно! Кошмарное везение! Преступники! Бандиты! Уголовники! Им удалось попасть в тысячные доли процента!

– У моих этот фокус не пройдет, – набылчился Уайт. – Пусть открывают по 70 коробок, и баста! Нечего с ними либеральничать!

– Но это же не испытание, а прямое убийство! Их шансы что-то порядка 10^{-16} , – сказал Блэк, тыча одеревеневшими пальцами в клавиши калькулятора.

– Ничего. Пополоскают мое имя в оппозиционной прессе и забудут. Это лучше, чем сесть в свое же заведение. Вы ведь в курсе, у меня тут не курорт!

...И вот наступил «день икс» для узников тюрьмы, возглавляемой Уайтом. Оба начальника вновь оказались соседями на этом представлении.

Первый узник действовал не менее затейливо, чем бывшие заключенные тюрьмы Блэка. Открыв очередную коробку, он внимательно читал лежавшую там записку, на несколько секунд замирал, закатывая глаза к потолку, и уверенно шел к другой коробке, как правило, не соседней с предыдущей. Наконец, в тридцать второй по счету коробке он с торжествующей улыбкой обнаружил записку со своей фамилией.

– Рано радуется, – злобно прошептал Уайт, – шансов, что остальным 99 заключенным тоже повезет, почти нет.

– Ошибаетесь, коллега! – ехидно заметил Блэк. – Готов спорить на что угодно, что остальные тоже пройдут испытание.

– Ах, так? Тогда предлагаю пари. Если мои заключенные «срежусь», вы отпишете мне все свое имущество. Все равно в тюрьме оно вам ни к чему. Если же и мне придется выпустить своих заключенных, то я готов отдавать вам сахар и масло из своей пайки (президент в приватном разговоре намекнул мне, что при таком исходе нас поместят в одну камеру). Я понимаю, что условия пари несколько неравные. Но вы сами предложили спорить на *что угодно*.

К удивлению Уайта, Блэк согласился на такие условия. Но он был просто поражен, когда Блэк вышел победителем!

Примерно через месяц после описываемых событий господы Блэк & Уайт коротали вечер в тесноватой, но все-таки отдельной камере-«двушке». Из уважения к прежним заслугам к ним больше никого не подселили.

– Расскажите, как все-таки вам удалось догадаться, что мои заключенные выдержат испытание, уже после визита первого из них? – спросил Уайт, с отвращением отхлебывая из кружки пресный тюремный чай.

– На самом деле я понял все гораздо раньше, когда внимательно понаблюдал за тем, как открывали коробки узники моей тюрьмы. Они знали, что все коробки с их фамилиями пронумерованы числами от 1 до 100. Тогда они и себе присвоили номера от 1 до 100.

– Но что это дает?

– Это позволяет организовать, скажем так, «кольцевую схему». Каждый из них сначала открывал коробку, номер

которой равен его собственному номеру. Затем он открыл коробку, номер которой совпадает с номером того узника, фамилию которого он увидел в первой коробке. Фамилия узника в этой коробке указывала номер коробки, которую следовало открыть на третьем шаге. И так далее. До чего мы, в конце концов, доберемся, временно допустив, что узнику разрешается раскрыть хоть все коробки? Рано или поздно в очередной коробке встретится его собственная фамилия и, таким образом, получившееся «кольцо» замкнется. Оно может, в частном случае, содержать даже всех узников (хотя может и лишь одного). Если не все узники оказались в таком «кольце», выберем любого «незадействованного» и повторим те же операции. Получится второе кольцо, потом третье и так далее, пока узники не кончатся. Так что в итоге все узники окажутся «укомплектованы» в кольца. В университете нам рассказывали, что это называется разложением перестановки в произведение независимых циклов. Жаль, что я поздно про это вспомнил!

– А я вообще не знал...

– На этом, – продолжил повествование Блэк, – и была основана стратегия узников. Она оказывается весьма эффективной, даже если узникам разрешено открывать не более 70 коробок. Если все имеющиеся кольца состоят не более чем из 70 узников каждое, то каждый узник, сделав не более 70 ходов, непременно наткнется на свою фамилию! И вероятность выхода всех узников на волю с головой на плечах просто-напросто равна вероятности того, что все циклы оказались не длиннее 70 человек!

– И какова же эта вероятность?

– Подсчитать нетрудно. Для начала найдем вероятность того, что образовался цикл ровно из k человек, где $k > 70$. Понятно, что если такой цикл есть, то других циклов длиной свыше 70 человек быть не может. Количество способов выбрать k человек из 100 равно, как известно из комбинаторики, $\frac{100!}{k!(100-k)!}$. Восклицательный знак в данном случае – не признак громкости, а произведение всех натуральных чисел от единицы до заданного числа (называется «факториал»). При этом k человек, попавших в цикл, можно упорядочить $(k-1)!$ способами...

– А это почему?

– Поясняю. Из тех k человек, что попали в цикл, выберем того, у которого *наименьший* номер. Следующим за ним по циклу может быть любой из остальных $(k-1)$ членов этого цикла, а следующим – один из $(k-2)$ остальных, и так далее. Итого, получаем

$$(k-1) \times (k-2) \times \dots \times 2 \times 1 = (k-1)!$$

способов. Остальных же $(100-k)$ человек, не попавших в цикл, можно, естественно, упорядочить $(100-k)!$ способами. Таким образом, способов образовать цикл ровно из k человек имеется

$$\frac{100!}{k!(100-k)!} \times (k-1)! \times (100-k)! = \frac{100!}{k}.$$

Всего же есть $100!$ способов упорядочить всех 100 узников. Окончательно вероятность образования кольца ровно из k узников равна $\frac{100!}{k} : 100! = \frac{1}{k}$. Очень просто!

– Но подождите, тогда вероятность того, что образовался цикл, состоящий *не менее чем* из 71 узника, равна сумме $\frac{1}{71} + \frac{1}{72} + \dots + \frac{1}{100}$. Ничего себе – просто! Как же я это подсчитаю? Тридцать дробей на бумажке складывать? Каль-

куляторы-то у нас отобрали. Оставили только вот «Четырехзначные математические таблицы»...

– Ничего, и этого хватит. Еще Эйлер доказал, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$ довольно близка к $\ln N + C$, где $C = 0,577\dots$ – постоянная Эйлера, причем чем больше N , тем точнее это равенство. Поэтому мы можем записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{71} + \frac{1}{72} + \dots + \frac{1}{100} &= \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{70}\right) \approx \\ &\approx (\ln 100 + C) - (\ln 70 + C) = \ln\left(\frac{100}{70}\right) \approx \ln 1,428 \approx 0,357. \end{aligned}$$

Значит, вероятность того, что не найдется ни одного столь длинного цикла (и, следовательно, что все узники найдут свои фамилии), равна примерно $1 - 0,357 = 0,643$ – почти две трети! Между прочим, в моей тюрьме, с разрешением открывать 90 коробок (ну я и лопух!), эта вероятность была еще больше, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{91} + \frac{1}{92} + \dots + \frac{1}{100} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \\ &- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{90}\right) \approx \ln\left(\frac{100}{90}\right) \approx 0,105, \end{aligned}$$

то она равнялась примерно $1 - 0,105 = 0,895$. Результат налицо: мы оба в этой камере!

– Но при испытании в моей тюрьме вы подозрительно быстро – сразу после визита первого узника – определили, что в разложении перестановки нет циклов длиннее 70. Каким образом?

– Элементарно! Я увидел, что и в вашей тюрьме узники додумались до кольцевой стратегии. Первый из них обнаружил свою фамилию в тридцать второй по счету коробке. Значит, в перестановку входит цикл длины 32. Но тогда в ней не могут содержаться циклы, длина которых превышает 68 и уж тем более 70.

– А как же понимать восклицания о фантастическом везении ваших заключенных? – поинтересовался Уайт.

– Признаюсь честно, я лукавил. Все-таки куда приятнее делить нары со знакомым интеллигентным человеком. А то подсадят к какому-нибудь злодею... К тому же, я очень люблю сладкий чай. В общем, кое-какая польза от знания математики все же есть, – философски заметил Блэк, намазывая на кусок хлеба вторую порцию масла.

Уайт голодными глазами отслеживал его движения.

– И вообще, – отеческим тоном добавил Блэк, – как говорит народная мудрость, в тюрьме только первые десять лет плохо, потом привыкаешь. Только, пожалуйста, не умирайте здесь раньше меня. Мне без вашего сахара с маслом будет очень нелегко.

Примечание. Авторы благодарны датскому специалисту в области информатики Петеру Бро Милтерсену, по мотивам задачи которого написана данная статья, а также петербургскому математику Михаилу Митрофанову, познакомившему авторов с этой задачей.

Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия

А. ЧЕРНОУЦАН

ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ РЕДКО удается решить, ограничиваясь вторым законом Ньютона и кинематикой, не выходящей за рамки равноускоренного движения. Исключение – движение заряженной частицы в однородном электрическом поле или по окружности вокруг кулоновского центра. В остальных случаях, когда расстояние между заряженными частицами меняется, необходимо использовать закон сохранения энергии.

Начнем с задач, в которых рассматривается движение *одной* заряженной частицы во внешнем электрическом поле одного или нескольких неподвижных зарядов. Здесь удобно применять теорему о кинетической энергии:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{эл},$$

где работа электрического поля выражается через разность потенциалов:

$$A_{эл} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Если принять потенциал на бесконечности равным нулю, то в начальной и конечной точках движения частицы его надо вычислять с помощью принципа суперпозиции:

$$\varphi = \sum_i k \frac{Q_i}{r_i},$$

где суммирование ведется по всем неподвижным зарядам Q_i (источникам поля), r_i – расстояние от i -го заряда до той точки, где вычисляется потенциал, а $k = 9 \cdot 10^9$ Дж · м/Кл² – электрическая постоянная.

Однако в качестве первого примера мы рассмотрим заряженную частицу в однородном электрическом поле, но в такой ситуации, где без энергии не обойтись.

Задача 1. Шарик массой 5 г и зарядом 2 мКл подвешен на нити длиной 1 м в горизонтальном электрическом поле с напряженностью 20 В/м. Шарик сначала удерживают в нижнем положении, а затем отпускают. Найдите натяжение нити в тот момент, когда шарик поднимется на 20 см выше начального положения.

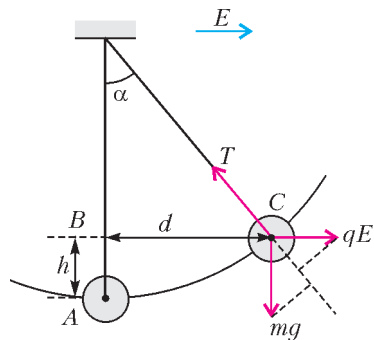


Рис. 1

ле с напряженностью 20 В/м. Шарик сначала удерживают в нижнем положении, а затем отпускают. Найдите натяжение нити в тот момент, когда шарик поднимется на 20 см выше начального положения.

Решение. Запишем второй закон Ньютона в проекции на радиальное

направление (рис.1):

$$T - mg \cos \alpha - qE \sin \alpha = m \frac{v^2}{l},$$

где $\cos \alpha = (l - h)/l = (1 - 0,2)/1 = 0,8$, $\sin \alpha = 0,6$. Квадрат скорости найдем с помощью теоремы о кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = A_{эл} + A_{грав}.$$

Каждую из работ – электрической и гравитационной сил – можно вычислить в лоб, заменив истинную траекторию на ломаную ABC (напомним, что работа каждой из этих сил не зависит от траектории):

$$A_{эл} = qE \cdot BC = qEd = qEl \sin \alpha,$$

$$A_{грав} = -mg \cdot AB = -mgh = -mgl(1 - \cos \alpha).$$

Окончательно получаем

$$T = mg(3 \cos \alpha - 2) + 3qE \sin \alpha = 92 \text{ мН}.$$

Заметим, что работу электрического поля можно было выразить через разность потенциалов с использованием формулы для разности потенциалов в однородном поле:

$$A_{эл} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q \cdot Ed = qE \cdot BC,$$

а работу силы тяжести – через разность потенциальных энергий:

$$A_{грав} = W_1 - W_2 = -mgh.$$

Задача 2. Возле поверхности шара радиусом 6 см, равномерно заряженного зарядом 4 нКл, находится частица массой 30 мг и зарядом 2 нКл. Частицу освобождают. Найдите скорость частицы в тот момент, когда она удалится от поверхности шара на расстояние, равное его радиусу.

Решение. Поскольку поле вне равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, находящегося в его центре, то потенциалы поля шара в начальной и конечной точках движения составляют

$$\varphi_1 = k \frac{Q}{R} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = k \frac{Q}{2R}.$$

Подставляя потенциалы в теорему о кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

найдем

$$v = \sqrt{\frac{kqQ}{mR}} = 20 \text{ см/с}.$$

Задача 3. Два точечных заряда по 10 нКл каждый закреплены на расстоянии 4 см друг от друга. Посередине между зарядами помещают заряженную частицу массой 2 мг и зарядом 36 нКл и отпускают. Какую скорость приобретет частица на большом расстоянии от зарядов?

Решение. Сначала ответим на вопрос, который часто возникает у внимательных школьников: почему частица вообще куда-то должна улететь, если она находится в положении равновесия? Дело в том, что это состояние *неустойчивого* равновесия – при небольшом смещении в сторону (рис.2) равнодействующая кулоновских сил будет направлена *от точки равновесия*, т.е. частица начнет разгоняться и улетит на бесконечность.

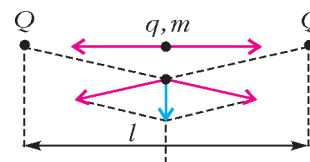


Рис. 2

Теперь – собственно решение. Потенциал в начальной точке движения равен

$$\varphi_1 = 2 \cdot k \frac{Q}{l/2},$$

а в конечной (на бесконечности) он нулевой:

$$\varphi_2 = 0.$$

Поэтому теорема о кинетической энергии имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = q \left(k \frac{4Q}{l} - 0 \right),$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{8kqQ}{ml}} = 18 \text{ м/с}.$$

Задача 4. По тонкому закреплённому кольцу радиусом 6 см равномерно распределён заряд 40 нКл. В центр кольца помещают частицу с зарядом 12 нКл и массой 9 мг и отпускают. Чему будет равна скорость частицы на большом расстоянии от кольца?

Решение. Отметим сразу, что в этой задаче, как и в предыдущей, движение начинается из точки неустойчивого равновесия. Конечный потенциал (на большом расстоянии) равен нулю:

$$\varphi_2 = 0,$$

а для вычисления начального потенциала (в центре кольца) надо применить принцип суперпозиции, разбив кольцо на маленькие кусочки, которые можно считать точечными зарядами. Потенциал центра кольца (как любой точки на его оси) вычисляется просто благодаря тому, что расстояния до всех точечных зарядов одинаковы:

$$\varphi_1 = \sum_i k \frac{\Delta Q_i}{R} = \frac{k}{R} \sum_i \Delta Q_i = k \frac{Q}{R}.$$

Заметим, что φ_1 не зависит от того, как распределён заряд Q по кольцу – равномерно или неравномерно. Подставляя потенциалы в теорему о кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = q \left(k \frac{Q}{R} - 0 \right),$$

получаем

$$v = \sqrt{\frac{2kqQ}{mR}} = 4 \text{ м/с}.$$

В последующих задачах удобнее применять не теорему о кинетической энергии, а закон сохранения механической энергии. Такой подход оказывается особенно разумным в тех случаях, когда в движении одновременно участвуют несколько заряженных частиц. Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов имеет вид

$$W_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}},$$

а потенциальная энергия системы нескольких зарядов равна сумме всех энергий парных взаимодействий:

$$W = \sum_{i < j} W_{ij}.$$

В этих формулах за ноль принята потенциальная энергия системы в состоянии, когда все заряды удалены друг от друга на очень большое расстояние.

Чтобы лучше почувствовать понятие потенциальной энергии системы зарядов, разберём простой пример на ее вычисление.

Задача 5. Четыре одинаковых заряда по 2 мкКл каждый расположены на прямой линии. Расстояние между соседними зарядами 60 см. Какую работу надо совершить, чтобы разместить эти заряды в вершинах правильного тетраэдра с ребром 60 см?

Решение. Для четырех зарядов 1–4 можно выделить шесть пар (рис.3): 1–2, 2–3, 3–4, 1–3, 2–4 и 1–4. Начальная энергия системы равна

$$W_{\text{нач}} = 3 \cdot k \frac{q^2}{l} + 2 \cdot k \frac{q^2}{2l} + k \frac{q^2}{3l} = \frac{13}{3} k \frac{q^2}{l},$$

а конечная энергия составляет

$$W_{\text{кон}} = 6 \cdot k \frac{q^2}{l}.$$

Работа внешних сил равна изменению энергии системы:

$$A = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \frac{5}{3} k \frac{q^2}{l} = 100 \text{ мДж}.$$

Теперь рассмотрим несколько задач на закон сохранения энергии.

Задача 6. Две частицы массой 2 мг и зарядом 10 нКл каждая находятся на расстоянии 5 см друг от друга, а посередине между ними закреплён точечный заряд 60 нКл. Частицы одновременно отпускают. Чему будет равна скорость частиц после их разлета на большое расстояние?

Решение. Из соображений симметрии ясно, что конечные скорости частиц одинаковы. Потенциальная энергия в конечном состоянии равна нулю, а в начальном состоянии составляет (рис.4)

$$W_{\text{нач}} = 2 \cdot k \frac{qQ}{r/2} + k \frac{q^2}{r}.$$

Закон сохранения энергии запишем в виде

$$0 + k \frac{q(4Q + q)}{r} = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} + 0,$$

откуда найдем

$$v = \sqrt{\frac{kq(4Q + q)}{mr}} = 15 \text{ м/с}.$$

Заметим, что эту задачу можно решать и с помощью теоремы о кинетической энергии. Для вычисления работы электрических сил надо использовать тот факт, что она не зависит от способа переноса частиц из начального состояния в конечное, и перенести частицы на бесконечность по очереди – сначала одну, а потом другую (попробуйте сделать это сами). Наоборот, некоторые из разобранных ранее задач можно решать через закон сохранения энергии. Например, в задаче 3 этот закон запишется так:

$$0 + 2 \cdot k \frac{qQ}{l/2} + k \frac{Q^2}{l} = \frac{mv^2}{2} + k \frac{Q^2}{l}$$

(видно, что поскольку заряды Q не сдвигаются с места, то энергию их взаимодействия можно не учитывать – она все равно сокращается). Выбор метода определяется удобством для данной конкретной задачи и вашим вкусом.

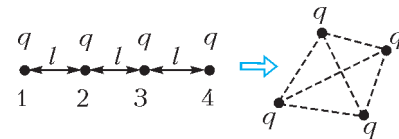


Рис. 3



Рис. 4

Энергетический подход можно также с успехом применять в задачах, где кроме электрической присутствуют другие консервативные силы (сила тяжести, как в задаче 1, или сила упругости) или сила трения, действие которой приводит к переходу механической энергии во внутреннюю.

Задача 7. Два небольших тела массой 100 г и зарядом 10 мкКл каждое удерживают на горизонтальной плоскости на расстоянии 1 м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость равен 0,1. Тела одновременно освобождают. Найдите максимальную скорость тел в процессе движения.

Решение. Если на движущиеся тела действуют силы трения, то часть механической энергии системы переходит во внутреннюю:

$$k \frac{q^2}{r_0} = k \frac{q^2}{r} + 2 \cdot \frac{mv^2}{2} + \Delta W_{\text{вн}},$$

причем увеличение внутренней энергии равно работе сил трения, взятой с противоположным знаком (или по модулю):

$$\Delta W_{\text{вн}} = F_{\text{тр}}(r - r_0) = \mu mg(r - r_0).$$

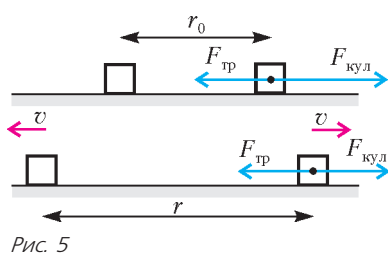


Рис. 5

Максимальная скорость тел достигается в тот момент, когда их ускорения равны нулю (рис. 5), т.е. обращаются в ноль равнодействующая кулоновской силы и силы трения:

$$k \frac{q^2}{r^2} = \mu mg,$$

откуда находим расстояние между телами в этот момент:

$$r = \sqrt{\frac{kq^2}{\mu mg}} = 3 \text{ м.}$$

Из первых двух равенств получаем

$$mv^2 = k \frac{q^2}{r_0} - k \frac{q^2}{r} - \mu mg(r - r_0).$$

Можно найти интересующую нас скорость непосредственно из этой формулы, но если сначала подставить $kq^2 = \mu mgr^2$, то формула упрощается:

$$mv^2 = \mu mg \frac{(r - r_0)^2}{r_0},$$

или

$$v = \sqrt{\frac{\mu g}{r_0}}(r - r_0) = 2 \text{ м/с.}$$

Задача 8. Два одинаковых шарика заряжены одинаковыми зарядами 0,5 мкКл, соединены пружиной жесткостью 6 Н/м и находятся на гладком горизонтальном столе. Вначале шарики удерживают на расстоянии 10 см друг от друга, при этом пружина не деформирована. Затем шарики одновременно отпускают. Найдите максимальное расстояние между шариками в процессе дальнейшего движения.

Решение. В этом случае надо учитывать как энергию кулоновского взаимодействия, так и энергию упругой деформации. Закон сохранения энергии запишем в виде

$$k \frac{q^2}{l_0} = k \frac{q^2}{l} + \frac{\chi(l - l_0)^2}{2},$$

где χ – жесткость пружины. После преобразований, сокра-

щая на $(l - l_0)$, приходим к квадратному уравнению

$$l^2 - l_0 l - \frac{2kq^2}{\chi l_0} = 0,$$

положительный корень которого равен

$$l = \frac{l_0}{2} + \sqrt{\frac{l_0^2}{4} + \frac{2kq^2}{\chi l_0}} = 15 \text{ см.}$$

Задача 9. Два маленьких шарика соединены недеформированной пружиной длиной 20 см и жесткостью 200 Н/м. После сообщения шарикам зарядов одного знака длина пружины в новом положении равновесия стала вдвое больше. Какую работу надо совершить для возвращения пружины в прежнее состояние?

Решение. В новом положении равновесия равнодействующая кулоновской силы и силы упругости равна нулю:

$$k \frac{q^2}{(2l_0)^2} = \chi l_0.$$

Работа внешних сил равна изменению энергии:

$$A = k \frac{q^2}{l_0} - \left(k \frac{q^2}{2l_0} + \frac{\chi l_0^2}{2} \right).$$

Подставляя сюда из первого равенства $kq^2 = 4\chi l_0^3$, получаем

$$A = \frac{3\chi l_0^2}{2} = 12 \text{ Дж.}$$

Задача 10. На высоте 3 м над землей закреплен заряд -4 мкКл, а под ним на высоте 2,2 м находится частица массой 0,9 г и зарядом 1 мкКл. Какую минимальную скорость надо сообщить частице вертикально вниз, чтобы она достигла поверхности земли?

Решение. В начальный момент действующая на частицу сила кулоновского притяжения больше, чем сила тяжести.

На первый взгляд, надо записать закон сохранения энергии, связывающий начальное состояние частицы с конечным, в котором она достигнет поверхности земли с нулевой скоростью. Однако такой подход может привести к неверному результату. Необходимо сначала проверить, где находится точка А, в которой сила кулоновского притяжения сравняется с силой тяжести (рис.6). Дело в том, что эта точка является точкой неустойчивого равновесия – до нее равнодействующая сил тормозит частицу, а после нее сила тяжести становится больше кулоновской силы и частица начинает разгоняться. Если точка А ближе, чем поверхность земли, то нужно частице сообщить скорость, которая позволит ей достичь точки А, а дальше она полетит сама.

Точку А найдем так:

$$k \frac{|Q|q}{(H - h_0)^2} = mg, \text{ откуда } h_0 = H - \sqrt{\frac{k|Q|q}{mg}} = 1 \text{ м.}$$

Видно, что точка А находится над поверхностью земли.

Запишем теперь закон сохранения энергии, считая, что в точке А скорость частицы обратится в ноль:

$$k \frac{qQ}{H - h_1} + mgh_1 + \frac{mv^2}{2} = k \frac{qQ}{H - h_0} + mgh_0.$$

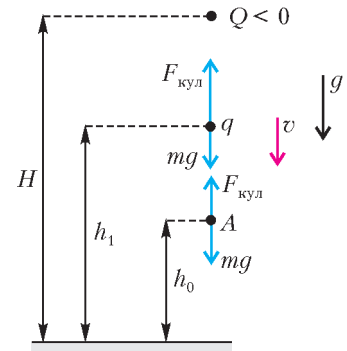


Рис. 6

Подставив сюда из первого равенства $kqQ = -mg(H - h_0)^2$ и проведя преобразования, для искомой скорости получим

$$v = \sqrt{\frac{2g}{H - h_1}}(h_1 - h_0) = 6 \text{ м/с.}$$

Заметим, что в точке A полная потенциальная энергия максимальна, поэтому, чтобы достигнуть поверхности земли, надо преодолеть потенциальный барьер, вершина которого находится в точке A .

Чтобы проиллюстрировать важность анализа потенциальных кривых для понимания свойств системы, разберем такую задачу.

Задача 11. На пружине жесткостью 5 Н/м подвешен в поле тяжести шарик массой 100 г . На шарик и на верхний конец пружины нанесены разноименные заряды, подобранные таким образом, что если пружина не деформирована, то кулоновская сила равна силе тяжести. Шарик удерживают в этом положении равновесия, а затем отпускают. Уйдет ли шарик из этого положения? Если да, то на сколько он отклонится? Длина недеформированной пружины 10 см .

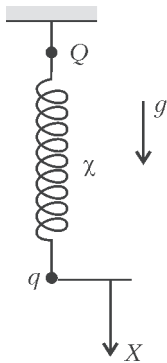


Рис. 7

Решение. Если описанное положение равновесия (пружина не деформирована, сила тяжести уравновешена кулоновской силой) устойчиво, то шарик останется на месте. Посмотрим, как изменяется потенциальная энергия в зависимости от смещения x из положения равновесия (рис.7):

$$\Delta W_{\text{п}} = -mgx + \frac{\chi x^2}{2} + k \frac{qQ}{l_0 + x} - k \frac{qQ}{l_0}.$$

По условию, $mg = k|qQ|/l_0^2$. Тогда

$$\Delta W_{\text{п}} = -mgx + \frac{\chi x^2}{2} + \frac{mgl_0 x}{l_0 + x} = \frac{\chi x^2}{2} - \frac{mgx^2}{l_0 + x}.$$

Видно, что при $\chi > 2mg/l_0$ потенциальная энергия в точке $x = 0$ имеет минимум, т.е. равновесие устойчиво (рис.8,а). Если же $\chi < 2mg/l_0$, то равновесие неустойчиво (рис. 8,б).

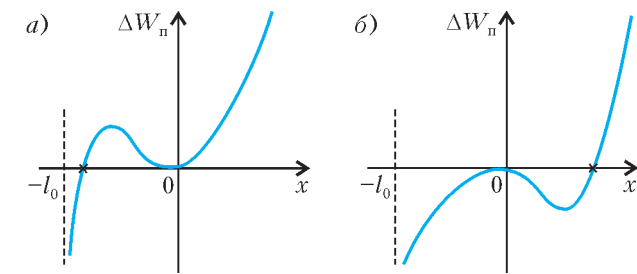


Рис. 8

Теперь запишем закон сохранения энергии, предполагая, что шарик сместился на x и остановился:

$$k \frac{qQ}{l_0} = k \frac{qQ}{l_0 + x} - mgx + \frac{\chi x^2}{2}.$$

После подстановки $kqQ = -mgl_0^2$ проведем преобразования и получим ответ:

$$x = \frac{2mg}{\chi} - l_0 = 30 \text{ см.}$$

При $\chi > 2mg/l_0$ ответ получается отрицательным, но он не имеет смысла – искомая точка (она отмечена на рисунке 8,а крестиком) недостижима, так как находится по другую

сторону потенциального барьера. При $\chi < 2mg/l_0$ получаем один положительный ответ (см. рис. 8,б). Действительно, если шарик сместится вверх, то он никогда не остановится и «упадет» на верхний заряд.

В заключение рассмотрим задачу, где закон сохранения энергии надо применять совместно с законом сохранения импульса.

Задача 12. Две частицы, имеющие массы 2 г и 3 г и заряды 3 мкКл и -12 мкКл , удаляются друг от друга. В некоторый момент они находятся на расстоянии 10 м и имеют одинаковые скорости 3 м/с . Найдите наибольшее расстояние между частицами в процессе движения.

Решение. Наибольшее расстояние соответствует моменту, когда скорости частиц будут равны по модулю и направлены в одну сторону (относительная скорость частиц равна нулю). Скорость частиц в этом состоянии найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2) u.$$

Выразив скорость u и подставив ее в закон сохранения энергии

$$k \frac{q_1 q_2}{r_0} + \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} = k \frac{q_1 q_2}{r} + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2},$$

найдем максимальное расстояние:

$$r = \left(\frac{1}{r_0} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{2v^2}{k q_1 q_2} \right)^{-1} = 30 \text{ м.}$$

Упражнения

1. Шарик массой 5 г и зарядом 2 мкКл подвешен на нити в горизонтальном электрическом поле напряженностью 20 В/м , направленной слева направо. Шарик с нитью отводят вправо до горизонтального положения и отпускают. Найдите натяжение нити в тот момент, когда она впервые составит с вертикалью угол α такой, что $\cos \alpha = 0,8$.

2. По тонкому кольцу радиусом 4 см равномерно распределен заряд 50 нКл . На оси кольца на расстоянии 3 см от его центра помещают частицу с зарядом -18 нКл и массой 1 мг и отпускают. Найдите скорость частицы в тот момент, когда она будет пролетать через центр кольца.

3. В вершинах острых углов ромба закреплены заряды по 7 нКл , а в вершинах тупых углов находятся две частицы массой 2 мг и зарядом 2 нКл каждая. Частицы одновременно отпускают, и они приходят в движение. Чему будут равны скорости частиц после их разлета на большое расстояние? Сторона ромба 3 см , а его острый угол 60° .

4. Три одинаковых шарика, несущих одинаковые заряды 2 мкКл , соединены попарно тремя одинаковыми пружинами и удерживаются на расстоянии 5 см друг от друга. Шарик отпускают, и они приходят в движение. Найдите жесткость каждой пружины, если в начальном положении они не деформированы, а максимальное расстояние между шариками в процессе движения в три раза больше начального.

5. Два небольших тела массой 50 г каждое, заряженные одинаковыми зарядами 10 мкКл , находятся на горизонтальной плоскости на расстоянии 2 м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость равен $0,1$. Тела одновременно освобождают. На каком расстоянии друг от друга тела остановятся?

6. В поле тяжести закреплен точечный заряд -10 мкКл , а под ним на расстоянии 5 м находится частица массой 9 г и зарядом 4 мкКл . Какую минимальную вертикальную скорость надо сообщить частице, чтобы она долетела до закрепленного заряда?