XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по математике

Четвертый (федеральный окружной) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике проходил с 22 по 27 марта 2008 года в городах Кисловодск (Северо-Западный, Центральный и Южный федеральные округа) и Уфа (Приволжский, Уральский, Сибирский и Дальневосточный федеральный округа).

Заключительный, пятый этап олимпиады проходил с 19 по 25 апреля 2008 года в Кисловодске. Знаменитый курорт России радушно принял 206 школьников России – дипломантов IV этапа и победителей Московской и Санкт-Петербургской олимпиад, а также команды школьников из Болгарии и Китая – стран, с которыми продолжается многолетнее плодотворное сотрудничество в области математики и математических соревнований. По результатам олимпиады помимо дипломов были вручены специальные призы. Эти награды достались самому юному участнику Дмитрию Крачуну (Санкт-Петербург), десятиклассникам Григорию Борисову (Санкт-Петербург) и Дмитрию Крепцеву (Кострома) – за решение трудной комбинаторной задачи 8, одиннадцатикласснику Виктору Кривошеину (Киров) – за полное решение сложной комбинаторной задачи 8, а также выступавшему за 10 класс Светозару Станкову из Болгарии, набравшему максимально возможное количество баллов. Опрос, проведенный среди участников, выявил задачи, наиболее понравившиеся школьникам. Первые три места в конкурсе задач заняли задачи 7, 2 и 8 для 9 класса, 7, 4 и 3 для 10 класса, 6, 8 и 7 для 11 класса. На закрытии олимпиады приятной неожиданностью для жюри стало награждение авторов лучших задач представителями «школьного жюри».

Ниже приводятся условия задач IV и V этапов олимпиады, а также список дипломантов V (заключительного) этапа XXXIV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Окружной этап

9 класс

1. Числа a, b, c таковы, что $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2008$ и $a \neq b$. Найдите значение выражения $c^2(a+b)$.

В.Сендеров

2. В клетках квадрата 5×5 изначально были записаны нули. Каждую минуту Вася выбирал две клетки с общей стороной и либо прибавлял по единице к числам в них, либо вычитал из них по единице. Через некоторое время оказалось, что суммы чисел во всех строках и столбцах равны. Докажите, что это произошло через четное число минут.

И.Богданов

3. Дан выпуклый шестиугольник $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, все стороны которого равны. Каждую его вершину отразили симметрично относительно прямой, проходящей через две соседние вершины. Полученные точки обозначили через $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5'$ и P_6' соответственно. Докажите, что треугольники $P_1'P_3'P_5'$ и $P_2'P_4'P_6'$ равны.

Л.Емельянов

4. Даны положительные рациональные числа a, b. Один из корней трехчлена $x^2 - ax + b$ – рациональное число, в несократимой записи имеющее вид m/n. Докажите, что знаменатель хотя бы одного из чисел a и b (в несократимой записи) не меньше $n^{2/3}$.

И.Богданов

5. Дано натуральное число $n > 1$. Для каждого делителя d числа $n+1$ Петя разделил число n на d с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь – остаток. (Например, при делении числа 17 на 6, $17 = 6\cdot 2 + 5$, т.е. неполное частное равно 2, а остаток – 5.) Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

С.Берлов

6. См. задачу М2101 «Задачника «Кванта».

7. Дан треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Касательная к его описанной окружности в точке B пересекает прямую AC в точке P. Точка D симметрична точке B относительно точки P, а точка E симметрична точке C относительно прямой BP. Докажите, что четырехугольник $ABED$ – вписанный.

В.Филимонов

8. 300 бюрократов разбиты на три комиссии по 100 человек. Любые два бюрократа либо знакомы друг с другом, либо незнакомы. Докажите, что найдутся два таких бюрократа из разных комиссий, что в третьей комиссии есть либо 17 человек, знакомых с обоими, либо 17 человек, незнакомых с обоими.

С.Берлов, М.Мурашкин

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись такие точки M и N, отличные от вершин, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA является биссектрисой угла MPN.

А.Грибалко

3. В очереди к стоматологу стоят 30 ребят: мальчиков и девочек. Часы на стене показывают 8:00. Как только начинается новая минута, каждый мальчик, за которым стоит девочка, пропускает ее вперед. Докажите, что перестановки в очереди закончатся до 8:30, когда откроется дверь кабинета.

М.Мурашкин

4. Последовательность (a_n) задана условиями $a_1 = 1000000$, $a_{n+1} = n\left[\dfrac{a_n}{n}\right] + n$. Докажите, что в ней можно выделить бесконечную подпоследовательность, являющуюся арифметической прогрессией.

М.Мурашкин

5. На острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из них есть хотя бы один друг. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды утром каждый житель произнес либо фразу «Все мои друзья – рыцари», либо фразу «Все мои друзья – лжецы», причем каждую из фраз произнесли ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное число пар друзей, один из которых рыцарь, а другой лжец.

М.Мурашкин

6. См. задачу М2102 «Задачника «Кванта».

7. На бесконечной в обе стороны ленте бумаги выписаны все целые числа, каждое ровно по одному разу. Могло ли оказаться, что между любыми двумя числами не стоит их среднее арифметическое?

Д.Храмцов, Л.Емельянов, И.Богданов, С.Волчёнков

8. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Пусть P – произвольная точка на большей дуге DE окружности ω, F – точка, симметричная точке A относительно прямой DP, M – середина отрезка DE. Докажите, что угол FMP – прямой.

Д.Скробот

11 класс

1. Даны два квадратных трехчлена, имеющих корни. Известно, что если в них поменять местами коэффициенты при x^2, то получатся трехчлены, не имеющие корней. Докажите, что если в исходных трехчленах поменять местами коэффициенты при x, то получатся трехчлены, имеющие корни.

Н.Агаханов, И.Богданов

2. По окружности отметили 40 красных, 30 синих и 20 зеленых точек. На каждой дуге между соседними красной и синей точками поставили цифру 1, на каждой дуге между соседними красной и зеленой – цифру 2, а на каждой дуге между соседними синей и зеленой – цифру 3. (На дугах между одноцветными точками поставили 0.) Найдите максимальную возможную сумму поставленных чисел.

Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон BC, AC, AB в точках A', B', C' соответственно. Точки K и L на окружности ω таковы, что $\angle AKB' + \angle BKA' = \angle ALB' + \angle BLA' = 180°$. Докажите, что прямая KL равноудалена от точек A', B', C'.

И.Богданов, И.Макаров

5. См. задачу 4 для 10 класса.

6. На диагонали BD вписанного четырехугольника $ABCD$ выбрана такая точка K, что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' – центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X. Докажите, что точки A, X, I, D лежат на одной окружности.

А.Гаврилюк

7. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0 \text{ и } \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1.$$

Докажите, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1.$$

М.Исаев

8. Имеются три комиссии бюрократов. Известно, что для каждой пары бюрократов из разных комиссий среди членов оставшейся комиссии есть ровно 10 бюрократов, которые знакомы с обоими, и ровно 10 бюрократов, которые незнакомы с обоими. Найдите общее число бюрократов в комиссиях.

М.Мурашкин, С.Берлов, И.Богданов

Заключительный этап

9 класс

1. Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз?

Н.Агаханов, И.Богданов

2. Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что если $-2 \leq a + b + c \leq 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0; 2]$.

Д.Терёшин

3. См. задачу М2107 «Задачника «Кванта».

4. В НИИЧАВО работают несколько научных сотрудников. В течение 8-часового рабочего дня сотрудники ходили в буфет, возможно по нескольку раз. Известно, что для каждых двух сотрудников суммарное время, в течение которого в буфете находился ровно один из них, оказалось не менее x часов ($x > 4$). Какое наибольшее количество научных сотрудников могло работать в этот день в НИИЧАВО (в зависимости от x)?

Д.Терёшин

5. Расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски назовем минимальное число ходов в пути короля между этими клетками. На доске отмечены три клетки, попарные расстояния между которыми равны 100. Сколько существует клеток, расстояния от которых до всех трех отмеченных равны 50?

И.Богданов

6. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Точка K – середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC. Оказалось, что прямая XY делит отрезок AK пополам. Чему может быть равен угол BAC?

С.Берлов

7. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x, то можно дописать на нее число $2x + 1$ или $\frac{x}{x+2}$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала.

А.Храбров

8. В нашем распоряжении имеются 3^{2k} неотличимых по виду монет, одна из которых фальшивая – она чуть легче настоящей. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а одни сломаны (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, т.е. может быть как верным, так и искаженным в любую сторону, причем на разных взвешиваниях – искаженным по-разному). При этом неизвестно, какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как определить фальшивую монету за $3k+1$ взвешиваний?

К.Кноп

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. См. задачу М2103 «Задачника «Кванта».

3. См. задачу М2105 «Задачника «Кванта».

4. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_1=1$, $b_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n+a_nb_n}{b_n}$ и $b_{n+1}=\dfrac{1+b_n+a_nb_n}{a_n}$. Докажите, что $a_{2008}<5$.

М.Мурашкин

5. Найдите все такие тройки действительных чисел x, y, z, что $1+x^4\le 2(y-z)^2$, $1+y^4\le 2(z-x)^2$, $1+z^4\le 2(x-y)^2$.

Н.Агаханов, И.Богданов

6. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, H – точка пересечения высот, O – центр описанной окружности, B_0 – середина стороны AC. Прямая BO пересекает сторону AC в точке P, а прямые BH и A_1C_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые HB_0 и PQ параллельны.

А.Полянский

7. См. задачу М2106 «Задачника «Кванта».

8. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести одну горизонтальную и одну вертикальную прямую так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих двух прямых.

Р.Карасев

11 класс

1. См. задачу 2 для 9 класса.

2. Пете и Васе подарили одинаковые наборы из N гирь, в которых массы любых двух гирь различаются не более чем в 1,25 раз. Пете удалось разделить все гири своего набора на 10 равных по массе групп, а Васе удалось разделить все гири своего набора на 11 равных по массе групп. Найдите наименьшее возможное значение N.

П.Кожевников

3. См. задачу М2108 «Задачника «Кванта».

4. Каждую грань тетраэдра можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что весь тетраэдр можно поместить в шар радиуса $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

Р.Карасев

5. Числа от 51 до 150 расставлены в таблицу 10×10. Может ли случиться, что для каждой пары чисел a, b, стоящих в соседних по стороне клетках, хотя бы одно из уравнений $x^2-ax+b=0$ и $x^2-bx+a=0$ имеет два целых корня?

И.Богданов, О.Подлипский

6. См. задачу М2104 «Задачника «Кванта».

7. См. задачу М2109 «Задачника «Кванта».

8. См. задачу М2110 «Задачника «Кванта».

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Матдинов Марсель – Оренбург, гимназия 1,
Мокин Василий – Саратов, ФТЛ 1,
Медведь Никита – Москва, лицей «Вторая школа»,
Тыщук Константин – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бондаренко Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 10 классам –

Брагин Владимир – Снежинск, гимназия 127,
Гусев Даниил – Дзержинск, школа 2,
Бочкарев Михаил – Пермь, школа 9,
Царьков Олег – Москва, лицей «Вторая школа»;

по 11 классам –

Григорьев Сергей – Санкт-Петербург, лицей 533,
Волков Владислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бойкий Роман – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бабичев Дмитрий – Долгопрудный, ФМЛ 5.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Савенков Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Егоров Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бернштейн Антон – Новосибирск, гимназия 1,
Кушнир Андрей – Иркутск, лицей 2,
Устинов Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Беляков Сергей – Омск, лицей 64,
Исаак Евгений – Курган, школа 38,
Пахарев Алексей – Ульяновск, гимназия 79;

по 10 классам –

Черкашин Данила – Санкт-Петербург, лицей 533,
Глюз Борис – Майкоп, гимназия 22,
Гусев Антон – Омск, лицей 64,
Ярославцев Иван – Москва, СУНЦ МГУ,
Антропов Александр – Пермь, школа 146,
Нижибицкий Евгений – Краснодар, школа 75,
Погорелов Дмитрий – Нижний Новгород, лицей 165 им. 65-летия ГАЗ,
Нечаев Станислав – Иркутск, гимназия 25,
Шабалин Филипп – Киров, ФМЛ;

по 11 классам –

Кевер Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Ардинарцев Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Омельяненко Виктор – Белгород, лицей 38,
Поляков Владимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кривошеин Виктор – Киров, ФМЛ,
Распопов Алексей – Ростов-на-Дону, ФМЛ 33,
Ромаскевич Елена – Москва, Московская гимназия на Юго-Западе 1543,
Кудык Никита – Омск, гимназия 117,
Фоминых Егор – Красноярск, школа 7,
Горинов Евгений – Киров, ФМЛ,
Амиров Сергей – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Бажов Иван – Екатеринбург, гимназия 9.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Ерохин Станислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Меньщиков Андрей – Курган, школа 38,
Николаев Семен – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Мифтахов Азат – Нижнекамск, лицей-интернат 24,
Горбачева Ирина – Краснодар, школа 64,
Голова Анна – Краснодар, школа 74,
Калиниченко Иван – Москва, лицей «Вторая школа»,
Климовицкий Иосиф – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Лысенко Николай – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Малясова Виктория – Ростов-на-Дону, Экономический лицей 14,
Хараджиев Олег – Набережные Челны, гимназия 26,
Бояров Игорь – Тольятти, лицей 51,
Горбань Степан – Оренбург, гимназия 1,
Ивлев Федор – Москва, Московская гимназия на Юго-Западе 1543,
Сербина Дарья – Курган, гимназия 47,
Балицкий Алексей – Железногорск Курганской обл., школа 11,
Козачинский Александр – Москва, лицей «Вторая школа»,
Максимова Марина – Краснодар, школа 42,
Павленко Роман – Набережные Челны, гимназия 26,
Печина Анна – Долгопрудный, ФМШ 5,
Степанов Борис – Екатеринбург, гимназия 9;

по 10 классам –

Новожилов Игорь – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
Куприянов Александр – Ярославль, школа 33,
Лукьянец Евгений – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Соколов Вячеслав – Санкт-Петербург, гимназия 261,
Аксенов Виталий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гильман Михаил – Санкт-Петербург, лицей 533,
Дедовик Юлия – Королев, лицей 4,
Кондакова Елизавета – Москва, лицей «Воробьевы горы» 1525,
Орлов Олег – Пермь, школа 146,
Адуенко Александр – Брянск, гимназия 1,
Сочнев Сергей – Майкоп, гимназия 22;

по 11 классам –

Архипов Дмитрий – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,
Салихов Камиль – Казань, гимназия 102,
Калачев Глеб – Москва, лицей «Вторая школа»,
Котельский Артем – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Мазурик Александр – Анапа, школа 7,
Милованов Алексей – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
Селищев Виталий – Барнаул, школа 100,
Атласова Мария – Якутск, РЛИ,
Екимов Александр – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,
Кац Дмитрий – Красноярск, ОУГ 13,
Леонтьева Любовь – Уфа, гимназия 93,
Титов Иван – Екатеринбург, гимназия 9,
Филькин Евгений – Майкоп, гимназия 22,
Кузнецов Тимофей – Новосибирск, лицей 130 им. академика М.А.Лаврентьева,
Палецких Алексей – Санкт-Петербург, лицей 533,
Сластенин Александр – Санкт-Петербург, школа 627,
Харитонов Михаил – п. Удельная Московской обл., Удельнинская гимназия.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

XLII Всероссийская олимпиада школьников по физике

С 21 по 27 апреля 2008 года в Академгородке на базе Новосибирского государственного университета (НГУ) прошел заключительный этап Всероссийской физической олимпиады школьников. На него были приглашены призеры окружного этапа олимпиады текущего года и дипломанты трех степеней заключительного этапа олимпиады прошлого года. Всего в заключительном этапе олимпиады приняли участие 218 школьников.

Как обычно, олимпиада проходила в два тура – теоретический и экспериментальный. Задачи теоретического тура были разработаны Центральной методической комиссией, а задания экспериментального тура подготовили преподаватели и сотрудники НГУ.

Ниже приводятся условия задач и список призеров заключительного этапа олимпиады.

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. График скорости частицы

На рисунке 1 изображена зависимость скорости v частицы от времени t. Масштабы по осям заданы в условных единицах. Известно, что площадь заштрихованного на рисунке прямоугольника равна 12 м, а ускорение частицы в точке A равно $a_A = 1,5$ м/с^2.

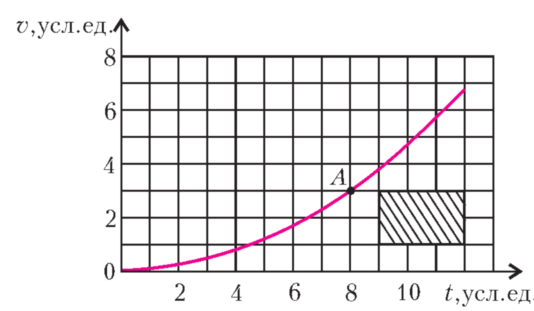


Рис. 1

Определите из этих данных:

1) масштабы по осям;
2) скорость частицы v_A в точке A;
3) путь, пройденный частицей от начала движения до достижения скорости v_A.

С.Козел

Задача 2. Разгон автомобиля

Автомобиль стартует с ускорением a_0. Из-за сопротивления воздуха ускорение падает по мере увеличения скорости v по закону $a \sim (v_0 + v)^{-1}$, где v_0 – известный коэффициент.

1) Постройте график, изображающий связь между a и v, выбрав координаты так, чтобы он являлся отрезком прямой линии.

2) Через какое время t_0 после начала движения автомобиль достигает скорости v_0?

3) Определите зависимость скорости v от времени t и постройте (качественно) график $v(t)$.

В.Слободянин

Задача 3. Электрический мостик

Два идеальных амперметра (внутреннее сопротивление которых равно нулю) включены в цепь (рис.2). Сопротивления резисторов равны $R_1 = 3$ кОм, $R_2 = 3R_1$, $R_3 = 2R_1$ соответственно. Сопротивление переменного резистора R_x может принимать любые значения от нуля до бесконечности. Напряжение источника постоянного тока $U = 81$ В.

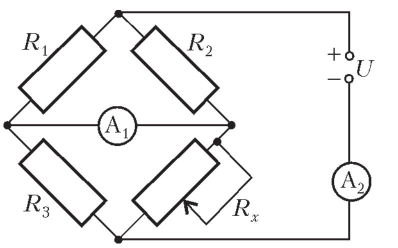


Рис. 2

Вычислите, при каких значениях сопротивления R_x:

1) сила тока I, протекающего через амперметр A_1, минимальна и чему она равна;

2) сила тока I, протекающего через амперметр A_1, максимальна и чему она равна;

3) сила тока I_0, протекающего через амперметр A_2, вдвое меньше I_{max} (см. пункт 2).

В.Слободянин

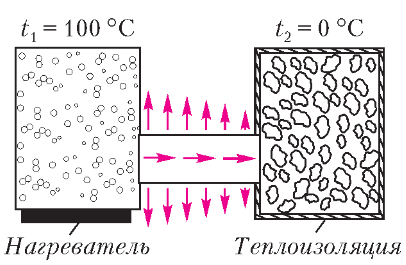


Рис. 3

Задача 4. Передача тепловой энергии

Имеются два сосуда. В первом из них находится кипящая вода ($t_1 = 100$ °C). Во втором теплоизолированном сосуде находится смесь воды и льда ($t_2 = 0$ °C). Сосуды соединены металлическим стержнем длиной $L = 50$ см, по которому тепловая энергия от кипящей воды передается тающему льду (рис.3). Стержень не теплоизолирован, и поэтому часть тепловой энергии рассеивается в окружающее пространство. Стрелками на рисунке указаны направления тепловых потоков. На приведенном графике (рис.4) показано распределение температуры вдоль стержня.

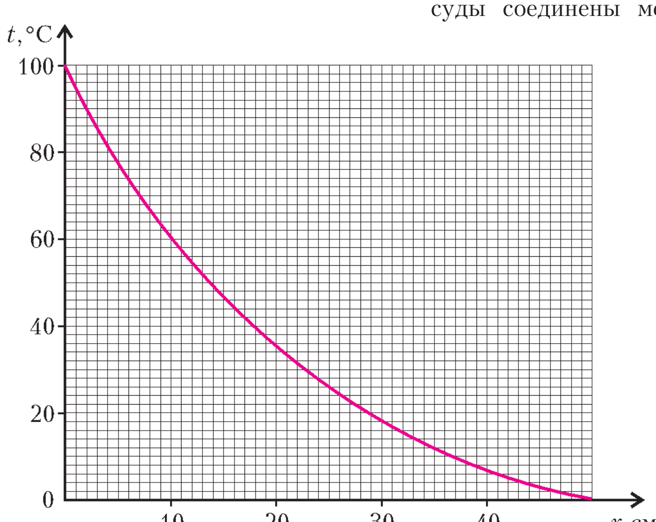


Рис. 4

1) Определите графически, какая доля тепловой энергии, поступающей в левый конец стержня от сосуда с кипящей водой, рассеивается в окружающее пространство.

2) Во сколько раз быстрее растает весь лед во втором сосуде, если поверхность стержня покрыть теплоизолирующим слоем?

Примечание. Тепловой поток через слой вещества толщиной Δx пропорционален разности температур Δt между поверхностями, ограничивающими слой: $\Delta Q = \Delta t / \Delta x$.

С.Козел

10 класс

Задача 1. Колесо с ребордой

По рельсам катится с постоянной скоростью вагонетка. Радиус ее колеса равен r, а радиус реборды (бортика, выступающего за обод колеса и предохраняющего колесо от схода с рельса) существенно больше. В некоторый момент времени скорости двух диаметрально противоположных точек A и B обода равны по модулю v_A и v_B соответственно (рис.5).

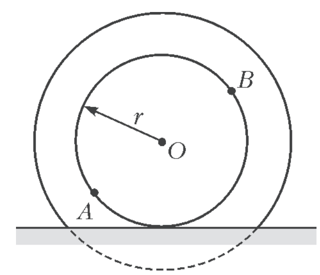


Рис. 5

1) С какой скоростью v_0 катится колесо?

2) В тот же момент времени скорость некоторой точки C, находящейся на реборде, направлена вертикально и равна v_C. Однозначно ли определяется положение этой точки?

3) Чему равна проекция ускорения a_{Cy} этой точки на вертикальную координатную ось?

В.Слободянин

Задача 2. Шайба на наклонной плоскости

На наклонной плоскости находится небольшая шайба массой m (рис.6). К шайбе прикреплен один конец легкой пружины жесткостью k и длиной L (в недеформированном состоянии). Другой конец пружины закреплен в некоторой точке O. Угол α наклона плоскости и коэффициент трения μ шайбы о плоскость связаны соотношением $\alpha = \mu$.

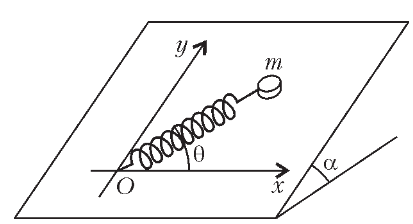


Рис. 6

Определите области, в которых шайба находится в состоянии равновесия, границы областей и изобразите их качественно на плоскости xy в двух случаях:

1) пружина подчиняется закону Гука как при растяжении, так и при сжатии;

2) пружина подчиняется закону Гука только при растяжении (например, пружина заменена легкой резинкой).

С.Козел

Задача 3. Сложный конденсатор

Сложный конденсатор состоит из четырех одинаковых пластин площадью $S = 1\ \text{м}^2$ каждая, расположенных па-

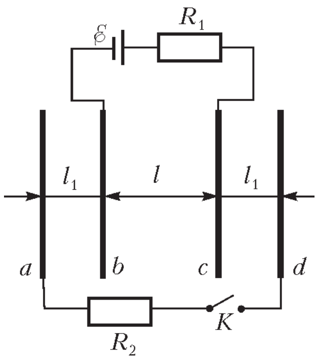


Рис. 7

раллельно друг другу (рис. 7). Расстояние между средними пластинами b и c равно $l = 2$ см. Расстояние между пластинами a и b, c и d равно $l_1 = l/2$. Пластины b и c подключены к идеальному источнику напряжения с $\mathcal{E} = 120$ В через резистор R_1. В начальном состоянии ключ K разомкнут.

1) Нарисуйте эквивалентную схему сложного конденсатора после замыкания ключа K и найдите его емкость C.

2) Какое количество теплоты Q выделится на резисторах R_1 и R_2 (в сумме) при замыкании ключа K?

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Указание. Воспользуйтесь законом сохранения энергии.

С.Козел

Задача 4. Минимальная скорость протона

1) Тонкое кольцо радиусом $R = 5$ см однородно заряжено зарядом $Q = +10^{-8}$ Кл (рис.8,*а*). Какую минимальную скорость $v_{\min}$ нужно сообщить протону, находящемуся вдали от кольца, чтобы он пролетел по оси кольца через его центр?

2) Пусть теперь заряд $Q = +10^{-8}$ Кл равномерно распределен по поверхности тонкого диска радиусом $R = 5$ см (рис.8,*б*). В центре диска имеется небольшое отверстие. Какую минимальную скорость нужно сообщить протону в этом случае, чтобы он пролетел через отверстие в диске?

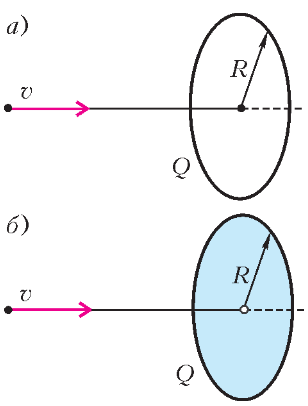


Рис. 8

Элементарный заряд $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

М.Соболев

Задача 5. Смесь воздуха и пара

См. задачу Ф2099 «Задачника «Кванта».

11 класс

Задача 1. Груз с пружинами

См. задачу Ф2096 «Задачника «Кванта».

Задача 2. Вращение заряженного цилиндра

См. задачу Ф2100 «Задачника «Кванта».

Задача 3. Заряженный мыльный пузырь

См. задачу Ф2097 «Задачника «Кванта».

Задача 4. Использование энергии морских волн

Первое устройство, вырабатывающее электричество для бакена за счет энергии морских волн, было создано в 1964 году. Схема бакена показана на рисунке 9. Воздух сначала засасывается при опускании поршня через клапан K_2, затем сжимается и впускается в рабочую полость через клапан K_1.

Когда поверхность воды опускается, клапан K_1 закрыт, а клапан K_2 открыт. За один раз засасывается $V_1 = 0,233$ м^3 воздуха при давлении $p_1 = 1,0 \cdot 10^5$ Па и температуре $t_1 = 7$ °С.

Когда поверхность воды начинает подниматься, клапан K_2 закрывается, и воздух адиабатически сжимается поршнем до давления $p_2 = 6,0 \cdot 10^5$ Па. После этого открывается клапан K_1, и поршень продолжает двигаться вверх до тех пор, пока весь воздух не будет вытолкнут в рабочую полость. При этом воздух в рабочей полости приводит в движение турбину и генератор, вырабатывающий электричество. После открытия клапана K_1 давление воздуха над поршнем остается приблизительно неизменным.

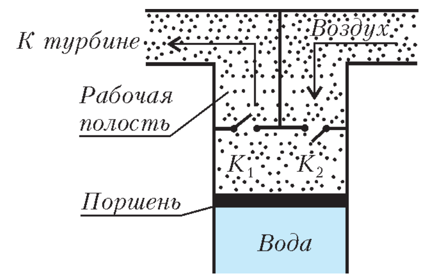


Рис. 9

Пренебрегая массой поршня и трением между поршнем и стенкой, определите, какую работу за один цикл совершает вода при подъеме поршня. Воздух можно считать идеальным двухатомным газом.

Фольклор

Задача 5. Оптическая система

См. задачу Ф2101 «Задачника «Кванта».

Экспериментальный тур

9 класс

Задача 1. Найти «конфету»

В одной коробке к дну прилипла «конфета», другая такая же коробка пуста. Не открывая коробок, найдите ту, что с конфетой, определите как можно точнее положение центра конфеты и укажите его крестиком на крышке с миллиметровкой. Обоснуйте и опишите свои действия.

Оборудование: скотч (тонкая клейкая лента), ножницы, нитки, стол, карандаш, линейка, две коробки с наклеенной миллиметровой бумагой.

Задача 2. Линейка и нить

Используя только предложенное оборудование, определите как можно точнее площадь всей поверхности отрезка деревянной линейки с кривым краем.

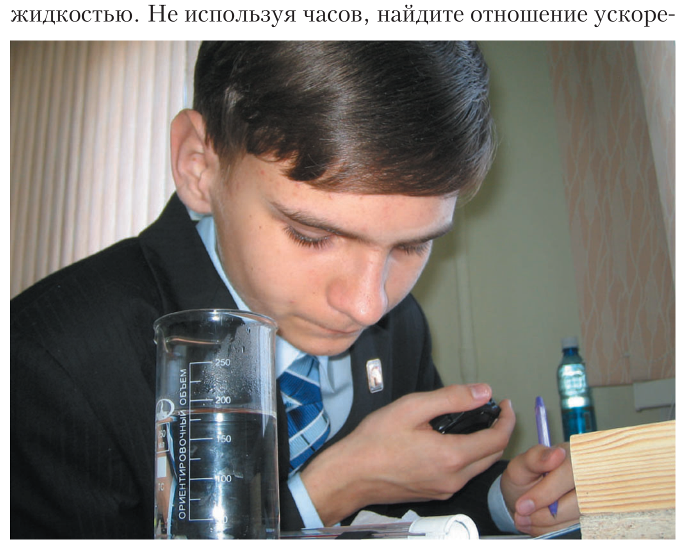
Оборудование: отрезок линейки, отрезок нити, скотч.

Примечание: используйте лишь отрезок имеющейся нити.

10 класс

Задача 1. **Отношение ускорений**

Одна цилиндрическая банка пуста, другая заполнена жидкостью. Не используя часов, найдите отношение ускоре-



ний банок при скатывании по наклонной доске. Проверьте, зависит ли это отношение от наклона доски.

Оборудование: пустая стеклянная банка и банка с жидкостью, портновский сантиметр, скотч, доска, бруски для изменения наклона доски и ловли банок.

Примечание: на доске разрешается сделать разметку карандашом.

Задача 2. Найти невидимое

У термометра открыта шкала в диапазоне от 30 до 50 °С. Нагрейте его в стакане с горячей водой до температуры чуть выше 50 °С, вытащите и вытрите. Положите его на салфетку. Проведите необходимые измерения так, чтобы установить зависимость скорости изменения показаний $\Delta T/\Delta t$ термометра от его показаний, т.е. от температуры T. Постройте график зависимости $|\Delta T/\Delta t|$ от T. Определите температуру воздуха в аудитории (обоснуйте способ и найдите значение).

Оборудование: термометр с частично заклееной шкалой, стакан, источник горячей воды в аудитории, салфетки, секундомер.

11 класс

Задача 1. Лампа накаливания

На цоколе лампы от карманного фонарика указаны номинальные значения напряжения $U_н$ и тока $I_н$. Рассчитайте по ним ее номинальное сопротивление $R_н$. Переключив мультиметр в режим измерения сопротивления, непосредственно определите сопротивление лампы R_0. Найдите отношение сопротивлений $R_н/R_0$ и объясните, почему они так заметно отличаются.

Переключите один мультиметр в режим измерения тока, а другой – в режим измерения напряжения и снимите вольтамперную характеристику лампы (зависимость тока I через лампу от поданного на нее напряжения U) с помощью предлагаемого оборудования. Определите силу тока при $U = U_н$ и сопротивление лампы. Определите сопротивление R_{min} лампы при предельно малой силе тока и сравните его с R_0. Если они отличаются друг от друга, то объясните, в чем причина этого различия.

Постройте график зависимости мощности лампы P от ее сопротивления R.

При температуре T, много большей комнатной температуры $T_к$ (по шкале Кельвина), сопротивление нити накала $R \approx R_к T/T_к$, где $R_к$ – сопротивление при комнатной температуре. Оцените, исходя из измерений, температуру нити накала при номинальном напряжении. Найдите мощность лампы при этой температуре и при температуре, меньшей на 30%.

Оборудование: лампочка от карманного фонарика, батарейка, два мультиметра, переменное сопротивление, соединительные провода, миллиметровая бумага.

Задача 2. Толщина стекла

Стеклянный брусок с приклеенной на одну грань фольгой находится в оболочке, исключающей прямое измерение толщины. Противоположная грань покрыта полупрозрачным скотчем, в котором имеется небольшое отверстие. Используя предложенное оборудование, определите толщину стекла и его показатель преломления. Оцените погрешности.

Оборудование: стеклянный брусок в оболочке, лазерная указка, карандаш, миллиметровая бумага, измерительный циркуль, скотч.

Примечание: у лазерных указок ограничен срок непрерывной работы, поэтому включайте их лишь на время измерений.

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Антоненко Даниил – Ростов-на-Дону, лицей 11,
Лавров Петр – Пермь, школа 3,
Горностаев Дмитрий – с. Шокша (Республика Мордовия), Шокшинская школа,
Тарасов Артем – Киров, ФМЛ,
Стройнов Евгений – Рязань, лицей 52;

по 10 классам –

Бычин Андрей – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Бычина Ольга – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Дорошенко Андрей – Омск, школа 92,
Дубов Александр – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
Кравчук Петр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Мосунова Дарья – Саров, лицей 15,
Старков Григорий – Ноябрьск, школа 7,
Трегубов Дмитрий – Киров, ФМЛ;

по 11 классам –

Толстикова Александра – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
Ефимов Сергей – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Самойлов Леонид – Саратов, ФТЛ 1,
Мельников Игорь – Челябинск, лицей 39,
Зеленеев Андрей – Киров, ФМЛ,
Пошакинский Александр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ».

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Смирнов Михаил – Саров, лицей 3,
Кононов Яков – Улан-Удэ, Российская гимназия 59,
Матвеев Филипп – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сергеев Александр – Москва, лицей «Вторая школа»,
Коновалов Александр – Долгопрудный, школа 5,
Артамонов Дмитрий – Саров, лицей 15,
Давыдов Иван – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Карелина Любовь – Екатеринбург, гимназия 9,
Николаев Егор – Йошкар-Ола, Политехнический лицей-интернат,
Усов Роман – Москва, лицей «Вторая школа»;

по 10 классам –

Григорьевых Данил – Ижевск, лицей 29,
Костарев Илья – Санкт-Петербург, лицей 533,
Кудряшова Нина – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Землянов Владислав – Урай, гимназия,
Крупин Илья – Кирово-Чепецк, гимназия 1,
Усманова Динара – Миасс, лицей 6,
Берсенев Никита – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Власюк Александр – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Корольков Андрей – Химки, лицей 11,
Левдик Павел – Озёрск Челябинской обл., лицей 39,
Либерзон Даниил – Киров, ФМЛ,
Матросов Михаил – Нововоронежск, школа 2,
Сафошкин Алексей – Рязань, гимназия 2;

по 11 классам –

Матвеев Харитон – Москва, лицей 1581,
Кусков Дмитрий – Владимир, гимназия 23,
Макарова Мария – Москва, лицей 1557,
Фейзханов Рустем – Москва, лицей 1557,

Шульчевский Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
Михайлов Александр – Челябинск, лицей 31,
Тамбова Александра – Уфа, гимназия 93,
Дроздюк Ирина – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Кокшаров Григорий – Пермь, школа 146,
Толстов Иван – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
Каплунович Петр – Челябинск, лицей 31,
Пахомов Антон – Самара, ФТЛ 1,
Алпеев Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Буслаев Павел – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Черников Юрий – Дубна, лицей «Дубна».

Дипломы III степени

по 9 классам получили
Казеев Никита – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Ковалев Кирилл – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,
Гордиенко Екатерина – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Анаскин Виктор – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Иванов Владимир – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Костина Елена – Киров, школа 21,
Рыков Андрей – Снежинск, гимназия 127,
Светогоров Александр – Обнинск, гимназия,
Томас Павел – Новосибирск, лицей 130 им. академика М.А.Лаврентьева,
Бормотов Виталий – Кумертау, школа 3,
Домбровский Андрей – Москва, школа 1268,
Маргаритов Артемий – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,
Офенгейм Дмитрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Фролов Федор – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей;

по 10 классам –

Алюшин Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Булдашев Иван – Челябинск, лицей 31,
Лисицкий Дмитрий – Белорецк, Белорецкая школа,
Захаров Дмитрий – Жуковский, гимназия 1,
Соболев Антон – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Мельников Михаил – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Толмачев Лев – Москва, школа 192,
Гудименко Софья – Владивосток, школа 14,
Киян Сергей – Тамбов, лицей 14,
Унучек Дмитрий – Химки, лицей 12;

по 11 классам –

Плешаков Руслан – Владивосток, школа 25,
Шалашугина Елена – Екатеринбург, СУНЦ УрГУ,
Шевцов Сергей – Саратов, ФТЛ 1,
Трихин Петр – Москва, ФМШ 5,
Семенов Станислав – Саров, лицей 15,
Байдасов Марат – Нижний Новгород, лицей 40,
Фролов Владимир – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
Барсков Кирилл – Омск, лицей 64,
Лобанов Святослав – Уфа, гимназия 105,
Маслов Ярослав – Новокузнецк, гимназия 44,
Степанов Евгений – Москва, СУНЦ МГУ,
Теретенков Александр – Пенза, гимназия 44,
Щукин Вадим – Москва, лицей «Вторая школа».

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №4)

1. Одно из возможных решений для левого треугольника показано на рисунке 1. Для правого треугольника этого сделать нельзя, так как сумма цифр 45 нечетна, а сумма чисел любой пифагоровой тройки четна.

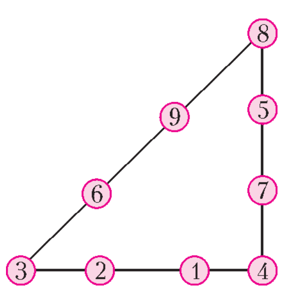


Рис. 1

2. 210.

Один из способов подсчета состоит в следующем. Разобьем все «несчастные счастливые» билеты на две пары симметричных групп. К первой паре отнесем билеты с номерами вида 666!?? и ??!666, где знак «?» обозначает любую цифру, а «!» – любую цифру, кроме цифры 6. Ко второй паре отнесем билеты с номерами вида !666!? и !?666!. Подсчет в парах произведем отдельно.

В первой паре, последовательно придавая знаку «!» значения 0, 1, ..., 9, кроме цифры 6, будем искать количества билетов, у которых суммы двух оставшихся неопределенных цифр равны, соответственно, 18, 17, 16, ..., 9, кроме 12. Таковых набирается 48. Значит, всего билетов в первой паре 96.

Аналогично поступаем с билетами второй пары – таких билетов набирается 114.

3. *Указание.* Рассмотрите два числа из тройки a, b, c, дающие один и тот же остаток при делении на 4.

4. 45°.

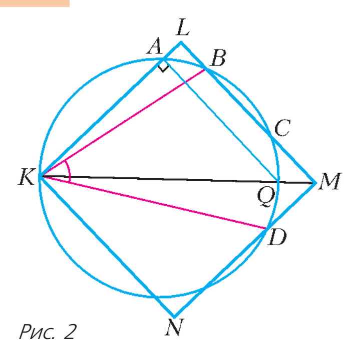


Рис. 2

Пусть Q – точка окружности, диаметрально противоположная точке K (рис.2). Поскольку угол QAK – прямой, то $AQ \parallel LM$, откуда $\overset{\smile}{AB} = \overset{\smile}{CQ}$ как дуги между параллельными хордами. Но в силу симметрии чертежа относительно диагонали квадрата $\overset{\smile}{CQ} = \overset{\smile}{QD}$, поэтому $\overset{\smile}{DQ} = \overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{DB} = \overset{\smile}{AQ} = 45°$.

5. В южном полушарии стрелки часов наверняка вращались бы в противоположную сторону, т.е. «против часовой стрелки».

Объясним, почему в наших часах стрелки вращаются «по часовой стрелке». Первыми часами были солнечные. В механических часах было выбрано такое же направление вращения стрелок, как и направление вращения тени от штырька в солнечных часах.

В северном полушарии тень от штырька вращается «по часовой стрелке» (проверьте это на опыте), вот почему в этом же направлении вращаются и стрелки наших часов.

А в южном полушарии тень от штырька вращается «против часовой стрелки» (убедитесь в этом путем рассуждений). Поэтому, если бы изобретатель стрелочных часов жил в южном полушарии, он бы наверняка выбрал именно это направление вращения.