ЛЕТНИЙ ТУРНИР ИМЕНИ А.П.САВИНА «МАТЕМАТИКА 6–8»

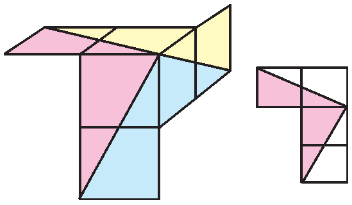

Рис. 3

7. Да, можно (см. рис. 3).

8. 80°.

По свойствам серединных перпендикуляров $MA = MB$, $MC = MD$, поэтому $\Delta AMD = \Delta BMC$ по трем сторонам, и $\angle MAD = \angle MBC$. Обозначим $\angle MAB = \angle MBA = x$. Заметим еще, что точки C и D лежат по одну сторону прямой AB. Для расположения точки M есть два случая.

Случай 1. Пусть точка M и точка C лежат по разные стороны прямой AB (рис.4).

На первый взгляд, $\angle MAD = \angle MAB + \angle DAB$ и $\angle MBC = \angle MBA + \angle CBA$. Однако углы в левых частях равны, а суммы не равны: $\angle MAB + \angle DAB = x + 85^\circ < x + 115^\circ = \angle MBA + \angle CBA$. Как так, ведь стороны-то совпадают!? Мы забыли, что луч AB (или луч BA) не обязан лежать внутри угла, и значит, сумма может быть не равна углу, а дополнять его до 360°. Обе суммы дополнять не могут, так как тогда они снова должны быть равны между собой. Значит, одна сумма равна углу, а другая угол дополняет. При этом дополняющая сумма больше: углы у нас меньше 180°, а дополняющая сумма больше 180°. Итак, $\angle MAD = 85^\circ + x$, значит, и $\angle MBC = 85^\circ + x$. Подставляя это в равенство $\angle MBC + \angle MBA + CBA = 360^\circ$, получим уравнение $(85^\circ + x) + x + 115^\circ = 360^\circ$, откуда $x = 80^\circ$.

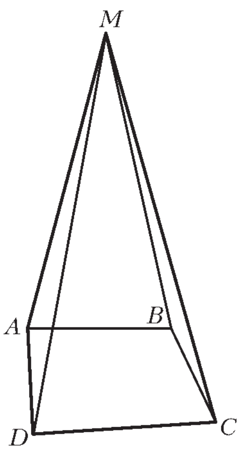

Рис. 4

Случай 2. Пусть точки M, C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Тогда $\angle MAD$ равен разности (в том или ином порядке) углов $\angle MAB$ и $\angle DAB$, т.е. $\angle MAD = 85^\circ - x$ или $\angle MAD = x - 85^\circ$. Аналогично, $\angle MBC = 115^\circ - x$ или $\angle MBC = x - 115^\circ$. Единственная возможность равенства углов: $115^\circ - x = x - 85^\circ$, откуда $x = 100^\circ$. Это не подходит, так как мы ищем угол при основании равнобедренного треугольника, а он острый. Значит, такое расположение точки M невозможно.

17. Пусть мы хотим представить число $m < N = p_1 p_2 \ldots p_l$. Докажем индукцией по N. База: $N = 6$. Тогда $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 3 + 1$, $5 = 3 + 2$. Переход от $N_1 = p_1 p_2 \ldots p_k$ к $N_2 = p_1 p_2 \ldots p_k p_{k+1}$. Если $m < N_1$, то число можно представить в виде суммы различных делителей N_1 (являющихся также и делителями числа N_2) по предположению. Если $m \geq N_1$, то $m = p_{k+1}s + d$, где $d < p_{k+1}$, $s < p_1 p_2 \ldots p_k$. Поскольку $p_{k+1} < p_1 p_2 \ldots p_k$ (докажем потом), то и $d < p_1 p_2 \ldots p_k$, поэтому и s и d мы можем представить в виде суммы различных делителей числа N_1 по предположению. Домножив почленно на p_{k+1} представление для s и сложив его с представлением для d, получим представление для m. В нем все слагаемые различны: внутри групп они и были различны, а слагаемые из разных групп различны, поскольку после домножения слагаемые из группы для s все делятся на p_{k+1}, а из группы для d – не делятся.

Осталось показать, что $N_1 = p_1 p_2 \ldots p_k > p_{k+1}$. Рассмотрим число $p_1 p_2 \ldots p_k - 1$. Оно взаимно просто с $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Поэтому у $N_1 - 1$ есть простой делитель, отличный от $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и, значит, не меньший p_{k+1}. Тем более $N_1 > p_{k+1}$.

18. При $v \geq 3{,}5$ м/с.

Пусть есть кошка, способная бегать со скоростью до 3,5 м/с. Посадим ее в точку K, середину отрезка OC, и поставим сторожить проход через точки O и C (рис.5). А именно, если мышка извне отрезков, выходящих из O или C (т.е. с ломаной $DEFAB$), попытается пройти через одну из этих точек, то кошка ее перехватит. Например, как только мышка через точку E двинется к O, кошка тоже двинется к O с вдвое меньшей скоростью, чем мышка. Если же мышка двинется назад к E, то и кошка – назад к K. Посадим теперь вторую кошку в O, и пусть она идет к мышке кратчайшим путем. Тогда, как бы медленно ни двигалась вторая кошка, мышка сначала будет вытеснена на периметр шестиугольника, а если она попала на ломаную BCD – то с этой ломаной на ломаную $DEFAB$. Далее, идя по периметру, вторая кошка рано или поздно вытеснит мышку с периметра на какой-то из отрезков, выходящих из O или C, и мышка на таком отрезке окажется зажатой между двумя кошками и будет поймана. Попытки «сбежать» на такой отрезок раньше ничего мышке не дадут, потому что первая кошка не позволит покинуть отрезок с другой стороны, и мышке придется вернуться на контур.

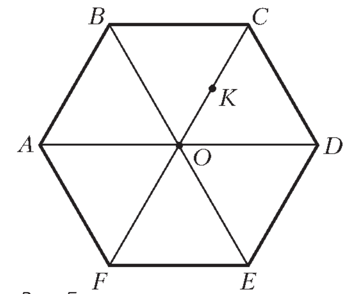

Рис. 5

Теперь пусть мышка бегает более чем вдвое быстрее любой кошки. Покажем, как она сможет убегать от кошек сколь угодно долго. Назовем вершины шестиугольника и его центр развилками: из каждой выходит не менее 3 коридоров. Пусть мышка сидит в некоторой развилке X и к ней по какому-нибудь коридору приближается кошка. Есть еще два коридора, которые сходятся в X: обозначим их XY и XZ. Если Y и Z связаны коридором, то пусть P – середина этого коридора. Добавим к XY половинки коридоров, выходящих из Y, а к XZ – половинки коридоров, входящих из Z, получим две «метелки», у которых общей точкой может быть только P (на рисунке 6 мышка сидит в B, кошка приближается по коридору AB, метелки насажены на отрезки BO и BC и обозначены красным и синим цветом соответственно). По крайней мере на одной из двух метелок нет другой кошки (исключая, быть может, точку P). Тогда мышка должна бежать к соответствующей развилке Y или Z, куда ни вторая, ни, тем более, первая кошка за это время добежать не успеют. Далее мышка продолжает убегать от кошек тем же способом.

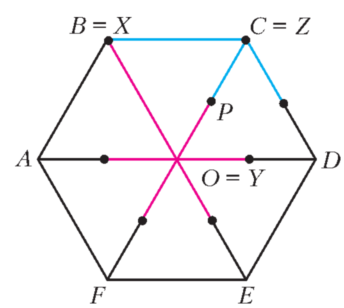

Рис. 6

29. 4949 королей.

30. Для треугольника решение очевидно, поэтому рассмотрим многоугольник с более чем 3 сторонами. Пусть B – одна из вершин многоугольника.

Рассмотрим группу из всех разбиений, где нет ни одной выходящей из B диагонали. Пусть A и C – соседние с B вершины. Заметим, что если в группе есть разбиение без диагонали AC, то можно провести и AC: ведь если нет диагоналей из B, то AC никого не пересечет. Значит, можно всю группу разбить на пары разбиений, где набор проведенных диагоналей отличается только на AC. Но тогда в каждой паре в одном разбиении четное число многоугольников, а в другом – нечетное. Следовательно, в группе тех и других разбиений поровну.

Проведем теперь произвольный набор выходящих из B диагоналей и рассмотрим группу из всех разбиений, которые можно получить, добавляя к этому набору любые диагонали, кроме выходящих из B. Если в набор вошли не все возможные диагонали из B, то добавить ничего нельзя, и вся группа состоит из одного разбиения. Если же не все, то среди частей разбиения есть многоугольник с более чем 3 сторонами. Как и выше, отметим в нем соседние с B вершины A и C, и разобьем всю группу на пары, где набор проведенных диагоналей отличается только на AC. Снова получим, что в каждой группе поровну разбиений на четное и на нечетное число многоугольников.

Остался только случай, когда в набор вошли все возможные диагонали из B. Тогда добавить ничего нельзя, и именно на это единственное разбиение отличаются количества способов разбить на четное и нечетное число многоугольников.

31. Пусть в треугольнике ABC (рис.7) углы B и C – острые, M и N – середины сторон AB и AC, D и E – такие точки на стороне BC, что $DMNE$ – прямоугольник, O – точка пересечения его диагоналей. Выберем на отрезке DE такую точку H, что $BD = DH$. Поскольку $DE = MN = BC/2$, то $HE = EC$. Разобьем треугольник ABC на треугольники BOH, COH, AOC и AOB. Их медианы OD, OE, ON и OM равны между собой как половинки диагоналей прямоугольника. Точки пересечения медиан каждого треугольника удалены от точки O на $2/3$ длины медианы и поэтому лежат на окружности с центром O.

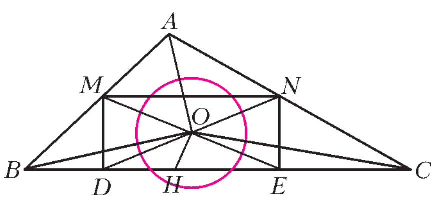

Рис. 7

32. Через 35 минут.

То что общая дорожка составляет только часть пути джентльменов (рис.8), создает неприятную для решения нерегулярность встреч. Можно, конечно, учесть это с помощью дополнительных неравенств, но этот хлопотливый метод не для Холмса. В его духе привлечь подставное лицо и попросить подыграть. Итак, попросим садовника погулять вокруг газона Холмса симметрично Ватсону относительно общей стороны. Тогда садовник будет ходить вокруг газона по часовой стрелке и встречаться с Холмсом регулярно, через равные промежутки времени. А поскольку по общей дорожке садовник и Ватсон идут бок о бок, то Ватсон встречается с Холмсом тогда и только тогда, когда садовник встречается с Холмсом на общей дорожке.

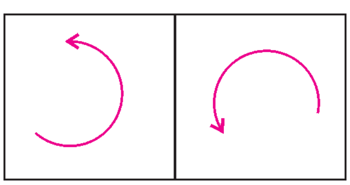
Рис. 8

Итак, поскольку скорости Холмса и садовника относятся как 6:5, то и между очередными встречами с садовником Холмс успевает пройти $6/11$ периметра квадрата, а садовник $5/11$. С точки зрения движения по дорожке квадрат можно считать кругом. Отмеряя от произвольной точки по $6/11$ периметра, мы отметим ровно 11 точек встреч, которые разбивают круг на 11 равных частей. Назовем P_1 точку какой-нибудь их встречи и обозначим еще 10 точек $P_2,\ldots,P_{11}$, шагая от точки P_1 против часовой стрелки по $1/11$ круга. Встречи Холмса и садовника происходят через равные промежутки времени T последовательно в точках $P_1, P_7, P_2, P_8, P_3, P_9, P_6, P_{10}, P_7, P_{11}, P_8, P_1$ и т.д.

Общая дорожка составляет ровно четверть круга. На нее могут попасть 2 или 3 отмеченные точки (4 точки уже не поместятся, так как расстояние между крайними $3/11 > 1/4$, а для 2-й точки всегда найдется место, поскольку первая разделит дорожку на два промежутка и один из промежутков будет не короче $1/8 > 1/11$). Если на общей дорожке лежат какие-то три последовательные точки (пусть P_1, P_2 и P_3), то встречи в этих точках (а, значит, и с Ватсоном) происходят через промежутки времени $2T$, $2T$, $7T$, $2T$, $2T$, $7T$,… Поэтому $2T = 10$ мин, и следующая встреча случится через $5T = 35$ мин. Если же на общей дорожке лежат две последовательные точки (пусть P_1, P_2), то встречи в этих точках происходят через промежутки времени $2T$, $9T$, $2T$, $9T$, $2T$, $9T$… Это противоречит двум встречам подряд через равные промежутки времени, поэтому такой случай невозможен.

33. Не обязательно.

Это может быть, например, Г-образный шестиугольник G, составленный из 1004 кирпичей: прямоугольников размера $1 \times \sqrt{502}$ (рис.9).

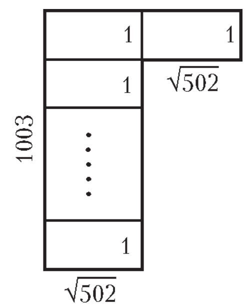

Рис. 9

Заметим, что из двух таких G составляется большой прямоугольник размера $1004 \times 2\sqrt{502}$, подобный кирпичу (с коэффициентом $2\sqrt{502}$). Значит, каждый кирпич разрезается на 2 шестиугольника, подобных G. Итого, G можно разрезать на $2 \cdot 1004 = 2008$ многоугольников, подобных исходному G.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Загрязненный снег больше поглощает солнечной энергии, чем отражает, а чистый снег – наоборот.

2. Чтобы поглощались «боковые» лучи, идущие от посторонних источников света.

3. Кожа нечищеного сапога бугристая и рассеивает свет. Вязкое вещество ваксы сглаживает шероховатости и укладывает торчащие ворсинки кожи. Растирание щеткой уменьшает неровности и превращает поверхность из матовой в блестящую.

4. Заливая неровности, образуемые красками, лак делает поверхность картины зеркальной. В этом случае, смотря на нее с удачно выбранной позиции, можно избежать отраженных бликов и помех от рассеянного красками света, благодаря чему цвета картины выигрывают в насыщенности.

5. Лучше рассеивает свет чертежная бумага, поскольку в этом случае свет рассеивается более мелкими неровностями поверхности.

6. Волокна, из которых состоит бумага, рассеивают свет, хотя они и прозрачны. Масло же заполняет поры между волокнами, и рассеяние света уменьшается.

7. Шероховатая поверхность сухого материала способствует рассеянию отраженного света. Если материал смочить, то, во-первых, уменьшается шероховатость, а во-вторых, в тонкой пленке воды свет испытывает многократное полное внутреннее отражение и поглощается.

8. Размеры неровностей на поверхности металлического листа велики по сравнению с длиной волны света, но малы по сравнению с длинами радиоволн.

9. Свинец и соли свинца хорошо поглощают рентгеновские лучи.

10. Матовый плафон, не изменяя величины светового потока, уменьшает яркость нити накала лампочки.

11. Голубая часть спектра излучения нити рассеивается на матовой поверхности плафона сильнее, чем красная.

12. В этих случаях предметы освещаются лишь небесным сводом, цвет которого голубой за счет рассеяния света в атмосфере.

13. В обоих случаях световые лучи испытывают преломление и отражение на множестве случайно расположенных кристалликов или капелек, что приводит к полному рассеянию света, причем примерно с одинаковой интенсивностью для всех длин волн, из-за чего снег, туман и облака воспринимаются белыми.

14. Крупные частицы – песок, ил, пузырьки воздуха – способны рассеивать более длинные (зеленые) волны.

15. На темном фоне мы наблюдаем дым в рассеянном свете, а наиболее сильно рассеивается свет синей части спектра. На фоне светлого неба дым виден в проходящем свете, в котором относительная доля синей составляющей спектра по той же причине уменьшается.

16. Проникающее в парник солнечное излучение поглощается землей, а инфракрасное излучение земли не пропускается из парника стеклом.

17. Мясо, а главным образом содержащаяся в нем вода, поглощает высокочастотное излучение, которое проникает в него на глубину порядка нескольких сантиметров.

18. Из-за рассеяния в земной атмосфере коротковолновой части спектра Земля из космоса (как и небо над нами) имеет голубой цвет.

19. На Луне нет атмосферы и практически нет рассеяния света. На Марсе из-за частых пылевых бурь атмосфера насыщена мельчайшими частицами красного, как и почва планеты, цвета.

20. Когда звезда видна у горизонта, свет от нее проходит почти в 40 раз больший путь в атмосфере, чем когда она находится в зените, и испытывает большее поглощение. Кроме того, собственное свечение атмосферы по той же причине больше у горизонта, чем вблизи зенита.

21. В сумерках освещение вызывается солнечным светом, рассеянным атмосферой на большой высоте – там, где Солнце пока еще не скрылось за горизонт. Из-за отсутствия на Луне атмосферы на ней нет и сумерек.

22. Луна отражает всего около 7% падающего на нее света, а Земля – около 40%.

23. Даже яркие звезды на фоне рассеянного атмосферой солнечного света не видны. Радиоастрономам же не мешает рассеянное радиоизлучение Солнца, поскольку оно очень мало.

Микроопыт

Насыщенный голубой цвет кристалликов медного купороса при их дроблении сменится на белесый светло-бирюзовый из-за сильного рассеяния падающего на них света – в измельченных кристалликах свет не проникает на большую глубину и поэтому мало поглощается.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1. $T = 112$ Н. **2.** $v = 9$ м/с. **3.** $v = 3$ м/с.
4. $\chi = 96$ Н/м. **5.** $l = 9$ м. **6.** $v_{\min} = 6$ м/с.

XXXIV ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Заключительный этап

9 класс

1. Существуют.
Подходят, например, числа $\underbrace{1,\ldots,1}_{10\ \text{чисел}}$, 4, 4, 4, 250.

2. Обозначим $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Пусть x_1, x_2, x_3 – его корни; тогда $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Заметим, что $P(1) = 1 + a + b + c$, поэтому $-1 \le (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \le 1$. Этого не может быть, если все три числа $1 - x_1$, $1 - x_2$, $1 - x_3$ по модулю больше 1. Значит, для какого-то корня, пусть x_1, имеем $|1 - x_1| \le 1$, или $0 \le x_1 \le 2$, что и требовалось.

4. Пусть в НИИЧАВО в тот день работали n человек. По условию, для каждой пары сотрудников время, когда в буфете присутствовал ровно один из них, не меньше x. Суммируя все эти промежутки времени по всем парам, получим число $S \ge \frac{n(n-1)}{2}x$. Посчитаем это число другим способом.
Отметим моменты, когда в буфет кто-то входил или из него кто-то выходил. Рабочий день разбился на m промежутков с длинами $t_1,\ldots,t_m$. Пусть на промежутке с номером i в буфете находилось k_i человек. Тогда этот промежуток будет посчитан ровно для тех пар сотрудников, в которых ровно один присутствует в буфете; таких пар $k_i(n - k_i)$. Поэтому этот промежуток внесет в S вклад $t_i k_i (n - k_i)$. Заметим, что выражение $k(n - k)$ достигает максимума при $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, т.е. вклад не больше $t_i\left[\frac{n}{2}\right]\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)$. Поскольку $t_1 + \ldots + t_m = 8$, то, суммируя, получаем, что

$$8\left[\frac{n}{2}\right]\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) \ge S \ge \frac{n(n-1)}{2}x.$$

Рассмотрим два случая.
1. Пусть n четно, $n = 2l$. Тогда получаем $8l^2 \ge l(2l - 1)x$, т.е.

$$(2x - 8)l \le x,\quad l \le \frac{x}{2x - 8},\quad n \le 2\left[\frac{x}{2x - 8}\right].$$

2. Если же $n = 2l + 1$, то получаем $8l(l + 1) \ge l(2l + 1)x$, т.е.

$$(2x - 8)l \le 8 - x,\quad l \le \frac{8 - x}{2x - 8},$$
$$n \le 2\left[\frac{8 - x}{2x - 8}\right] + 1 = 2\left[\frac{x}{2x - 8}\right] - 1.$$

Таким образом, в любом случае $n \le 2\left[\frac{x}{2x - 8}\right]$.
Покажем, что эта оценка достигается. Положим $n = 2l = 2\left[\frac{x}{2x - 8}\right]$. Рассмотрим все способы отметить l сотрудников из $n = 2l$; пусть число таких способов равно K. Разобьем 8-часовой интервал на K отрезков, каждый длиной $\frac{8}{K}$ часов. Каждому отрезку сопоставим группу из l человек; пусть в течение этого отрезка времени ровно эти l человек и находились в буфете. Из симметрии ясно, что для любых двух сотрудников время, в течение которого ровно один из них был в буфете, одно и то же – пусть оно равно y. Тогда в подсчете, проделанном выше, все неравенства обратятся в равенства, и мы получим $8l(2l - l) = S = \frac{2l(2l-1)}{2}y$. Отсюда $y = \frac{8l}{2l - 1} \ge x$ (последнее неравенство равносильно $l \le \frac{x}{2x - 8}$), что и требовалось.
Замечание. При $x \le 4$ число сотрудников может быть каким угодно.

5. Одна.
Рассмотрим произвольные две клетки. Пусть разница абсцисс их центров равна $x \ge 0$, а разница ординат $y \ge 0$. Тогда ясно, что король может дойти от одной из этих клеток до другой за $\max(x, y)$ ходов и не может за меньшее число, т.е. расстояние между этими клетками равно $\max(x, y)$. Будем обозначать расстояние между A и B через $\rho(A, B)$.
Пусть отмечены клетки A, B, C. Тогда для каждой пары этих

клеток существует координата, в которой они различаются ровно на 100. Для двух пар клеток это будет одна и та же координата; для определенности пусть это пары (A, B) и (A, C), различающиеся по горизонтали. Тогда абсциссы точек B и C либо различаются на 200, либо совпадают. Первый случай невозможен, так как расстояние между B и C равно 100. Значит, их абсциссы совпадают, а поэтому ординаты отличаются на 100. Тогда (с точностью до симметрии) можно считать, что клетки имеют координаты $B(0,\ 0)$, $C(0,\ 100)$, $A(100,\ x)$ (при этом, естественно, $0 \le x \le 100$, иначе $\rho(A,B)$ или $\rho(A,C)$ больше 100).

Рассмотрим точку X, отстоящую от точек A, B и C на 50. Ее абсцисса должна быть равна 50, иначе $\rho(X,B) > 50$ или $\rho(X,A) > 50$. Аналогично, ордината точки X равна 50, иначе $\rho(X,B) > 50$ или $\rho(X,C) > 50$. Значит, координаты X равны $(50,\ 50)$, причем, как нетрудно видеть, эта клетка подходит. Таким образом, искомая клетка ровно одна.

6. $120°$.

Пусть отрезки XY и AI пересекаются в точке S (рис.10). Как известно, $KI = KA$, т.е. высота KT треугольника AKI является его медианой. Так как $XY \perp AI$, то $XY \parallel KT$, а поскольку XY делит сторону AK пополам, то XY – средняя линия в треугольнике AKT. Значит, $AS/SI = 1/3$; при этом XS – высота в прямоугольном треугольнике AXI, откуда $AS/SI = (AX/XI)^2$, $\operatorname{tg}\angle XAI = XI/AX = \sqrt{3}$, $\angle XAI = 60°$, и $\angle BAC = 2\angle XAI = 120°$.

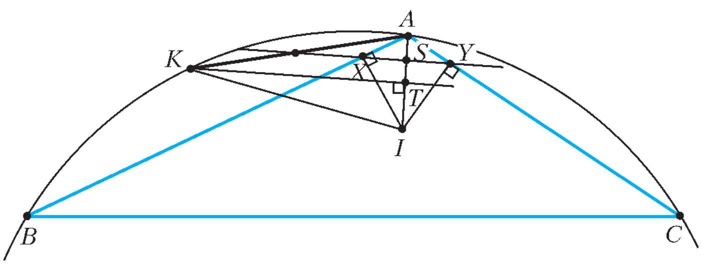

Рис. 10

7. Можно считать, что «лишних» чисел на доску не выписывалось, т.е. все числа «участвовали» в получении числа 2008. Заметим, что все выписанные числа положительны.

Пусть в некоторый момент на доске написано рациональное число, в несократимой записи имеющее вид $x = \dfrac{p}{q}$. Тогда можно дописать число $2x + 1 = \dfrac{2p+q}{q}$ или $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{p}{p+2q}$.

Заметим, что если какая-нибудь из этих дробей сократима, то только на 2. Действительно,

$$\text{НОД}(2p+q,q) = \text{НОД}(2p,q) \le 2\text{НОД}(p,q) = 2 \quad \text{и}$$

$$\text{НОД}(p,p+2q) = \text{НОД}(p,2q) \le 2\text{НОД}(p,q) = 2.$$

Поэтому сумма числителя и знаменателя в несократимой записи нового числа равна либо

$$(2p+q)+q = p+(p+2q) = 2(p+q) \text{ либо } \frac{2(p+q)}{2} = p+q.$$

Таким образом, сумма числителя и знаменателя в несократимой записи либо не изменяется, либо удваивается. Так как в конце она оказалась равной 2008 + 1 = 2009, то удваиваться она не могла, и изначально она тоже была равна 2009. Так как исходное число было натуральным, то его знаменатель был равен 1, а числитель, соответственно, 2009 – 1 = 2008, что и требовалось.

8. Будем обозначать фальшивую монету ФМ.

Пусть ФМ находится среди 3^d монет. Заметим, что если мы положим на чашки исправных весов по 3^{d-1} монет, то при любом исходе взвешивания число монет, которые могут оказаться фальшивыми, окажется равным 3^{d-1}.

Лемма. *Из 3^{2k} монет за $3k$ взвешиваний можно либо найти фальшивую, либо найти три монеты, среди которых находится фальшивая, и при этом найти одни исправные весы.*

Доказательство. Индукция по k.

База при $k = 1$. Расположим монеты в виде квадрата 3×3. Занумеруем его строки и столбцы цифрами от 1 до 3, а монеты – парами этих цифр соответственно; например, монета в первой строке и втором столбце получит номер 12.

Сравним монеты первой и второй строчек на первых весах; затем сравним монеты первого и второго столбца на вторых весах. Предположим, что первые и вторые весы исправны. Тогда в любом случае эти взвешивания позволяют однозначно определить ФМ. Можно считать, что это монета 11. Тогда, если сломаны первые весы, то ФМ находится в первом столбце, а если вторые – то в первой строке.

Третьим взвешиванием на последних весах сравним 12 + 13 с 21 + 31. Если весы в равновесии, то ФМ может оказаться только 11; зато мы не знаем, какие весы сломаны. Пусть одна из чаш оказалась легче (например, 12 + 13). Это означает, что показания третьих весов противоречат показаниям вторых, а тогда первые весы – исправные, и мы нашли три монеты (лежащие в первой строке), среди которых обязана быть ФМ.

Переход. Пусть $k > 1$, и у нас есть 3^{2k} монет. Объединим их в группы по 9 штук, назвав каждую *новой монетой*. По предположению индукции, мы можем за $3k - 3$ взвешивания выяснить либо фальшивую среди этих $3^{2(k-1)}$ новых монет, либо найти исправные весы и три новые монеты, среди которых есть фальшивая.

В первом случае, пользуясь утверждением базы индукции для этих 9 монет (составляющих найденную новую монету), мы можем за 3 взвешивания сделать требуемое.

Во втором мы получили исправные весы и 27 кандидатов на фальшивую монету. Тогда за следующие 3 взвешивания на исправных весах мы уменьшим количество кандидатов до 9, до 3 и до 1, т.е. найдем фальшивую. Переход, а вместе с ним и лемма, доказаны.

Теперь легко получить решение задачи. Сделаем $3k$ взвешиваний согласно лемме. Если мы уже нашли фальшивую монету, то мы совершили требуемое. Иначе мы нашли исправные весы и 3 монеты, среди которых есть фальшивая. Тогда за последнее взвешивание на этих весах мы из этих 3 монет найдем фальшивую.

Замечание. Улучшив процедуру, можно добиться даже меньшего числа взвешиваний. Например, можно показать, что из $3^{n(n+1)}$ монет фальшивая находится за $(n+1)^2$ взвешиваний.

10 класс

4. Заметим, что $a_n, b_n > 0$.

Докажем индукцией по n, что $\dfrac{1}{a_n+1} - \dfrac{1}{b_n+1} = \dfrac{1}{6}$. База при $n = 1$ очевидна: $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$. Пусть при некотором n это верно. Тогда имеем

$$\frac{1}{a_{n+1}+1} - \frac{1}{b_{n+1}+1} = \frac{b_n}{1+a_n+b_n+a_nb_n} - \frac{a_n}{1+a_n+b_n+a_nb_n} = \frac{b_n - a_n}{(1+a_n)(1+b_n)} = \frac{1}{a_n+1} - \frac{1}{b_n+1}.$$

Переход доказан.

Итак, при любом n мы получили $\dfrac{1}{a_n+1} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{b_n+1} > \dfrac{1}{6}$, т.е. $a_n + 1 < 6$ и $a_n < 5$, что и требовалось.

5. $(-1,\ 0,\ 1)$, $(-1,\ 1,\ 0)$, $(0,\ -1,\ 1)$, $(0,\ 1,\ -1)$, $(1,\ -1,\ 0)$, $(1,\ 0,\ -1)$.

Пусть для определенности $x \ge y \ge z$.
Поскольку $0 \le \left(x^2-1\right)^2 = \left(x^4+1\right) - 2x^2$, мы имеем $2x^2 \le 1 + x^4 \le 2\left(y-z\right)^2$, откуда получаем $|x| \le y - z$ и, аналогично, $|z| \le x - y$. Тогда $|z| + |x| \le (x-y) + (y-z) = x - z$. Это возможно только если $x \ge 0$, $z \le 0$, при этом неравенство обращается в равенство. Значит, и все промежуточные неравенства также обращаются в равенства, т.е. $2x^2 = 1 + x^4$, $2z^2 = 1 + z^4$, откуда $x^2 = z^2 = 1$ и $x = 1$, $z = -1$. Кроме того, $|x| = y - z$, откуда $y = 0$. Проверка показывает, что этот ответ подходит.

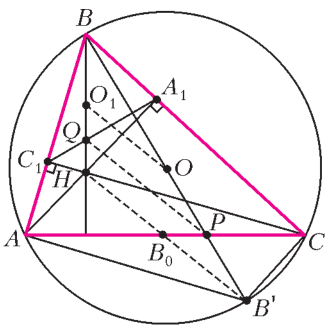

Рис. 11

6. Пусть точка O_1 – середина отрезка BH (рис.11). Так как $\angle BA_1H = \angle BC_1H = 90°$, то O_1 является центром окружности, проходящей через точки A_1, B, C_1 и H.
Так как прямоугольные треугольники BAA_1 и BCC_1 подобны, то $AB/A_1B = CB/C_1B$. Отсюда следует, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны. Заметим, что BQ и BP, а также BO_1 и BO – пары соответствующих отрезков в подобных треугольниках A_1BC_1 и ABC, отсюда $BO_1/BO = BG/BP$, следовательно, $OO_1 \parallel PQ$.
Пусть B' – точка описанной окружности треугольника ABC, диаметрально противоположная точке B; тогда O – середина отрезка BB' и $\angle BAB' = \angle BCB' = 90°$. Имеем: $\angle ACB' = \angle BCB' - \angle BCA = 90° - \angle BCA = \angle A_1AC$, откуда $AA_1 \parallel CB'$. Аналогично, $CC_1 \parallel AB'$. Таким образом, $AHCB'$ – параллелограмм и B_0 – его центр, а значит, лежит на диагонали HB'. В треугольнике BHB' отрезок OO_1 является средней линией, поэтому $OO_1 \parallel HB_0$. Итак, $OO_1 \parallel HB_0 \parallel PQ$.
8. Рассмотрим конечное множество прямых $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$, содержащих горизонтальные стороны данных прямоугольников и конечное множество прямых $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$, содержащих вертикальные стороны прямоугольников. Будем считать, что $h_1, h_2, \ldots, h_k$ занумерованы снизу вверх, а $v_1, v_2, \ldots, v_l$ занумерованы слева направо. Пару прямых (h, v), где $h \in H$, $v \in V$, назовем *удачной*, если все прямоугольники, не пересекающие ни h, ни v (если такие найдутся), расположены ниже h и левее v. Удачные пары существуют, например пара (h_k, v_l). Среди всех удачных пар выберем пары (h_m, v), в которых h_m самая низкая, а среди всех удачных пар вида (h_m, v) выберем пару (h_m, v_n), в которой v_n самая левая.
Если каждый данный прямоугольник пересекает h_m или v_n, то пара (h_m, v_n) – искомая. Пусть это не так; тогда найдется прямоугольник П, расположенный ниже h_m и левее v_n. Поскольку пара прямых (h_{m-1}, v_n) не является удачной, найдется прямоугольник $П_1$, не пересекающий v_n, нижняя сторона которого лежит на h_m (иначе все прямоугольники, пересекающие h_m или v_n, пересекают также h_{m-1} или v_n). Если бы $П_1$ лежал правее v_n, пара прямоугольников П и $П_1$ не удовлетворяла бы условию. Следовательно, $П_1$ находится левее v_n. Аналогично, так как пара прямых (h_m, v_{n-1}) не является удачной, найдется прямоугольник $П_2$, не пересекающий h_m, левая сторона которого лежит на v_n, причем $П_2$ находится ниже h_m. Но тогда пара прямоугольников $П_1$ и $П_2$ не удовлетворяет условию – противоречие.

11 класс

2. 50 гирь.
Пусть набор состоит из 20 гирь массой 50 г и 30 гирь массой 40 г. В этом случае Петя может разделить все гири на 10 групп, в каждой из которых две гири массой 50 г и три гири массой 40 г; а Вася может разделить все гири на 5 групп, в каждой из которых 4 гири массой по 50 г, и на 6 групп, в каждой из которых 5 гирь по 40 г. Таким образом, значение $N = 50$ возможно.
Предположим, что $N < 50$ и Пете с Васей удалось разложить гири на группы нужным образом. Тогда в одной из Петиных групп не более 4 гирь, а в одной из Васиных групп также не более 4 гирь.
Лемма. *Пусть имеются две группы гирь равной суммарной массы, состоящие из k и l гирь, где k < l. Тогда $k \ge 4$, причем в случае k = 4 имеем l = 5, и в каждой из групп массы гирь равны.*
Доказательство. Пусть m – масса самой легкой гири в группе из l гирь, тогда масса второй группы не меньше $lm \ge (k+1)m$, а масса первой группы не больше $1{,}25km$, откуда $k + 1 \le 1{,}25k$, и $k \ge 4$. Если $k = 4$, то в указанных выше оценках неравенства обращаются в равенства, поэтому $l = k + 1 = 5$, в группе из 5 гирь все гири одинаковой массы $m = 4x$, а в группе из 4 гирь все гири массой $5x$. Лемма доказана.
1) Предположим, что среди Петиных групп найдутся две группы с разным количеством гирь. Тогда из леммы следует, что в нескольких Петиных группах по 4 гири массы $5x$, а в остальных Петиных группах по 5 гирь массы $4x$. Общая масса всех гирь тогда равна $200x$, что невозможно, так как 200 не делится на 11, а суммарная масса в каждой Васиной группе должна быть целым кратным x.
2) Предположим, что в 10 Петиных группах равное число гирь. Тогда $N \vdots 10$.
Если среди Васиных групп найдутся две группы с разным количеством гирь, то из леммы следует, что в каждой из Васиных групп не менее 4 гирь, откуда $N \ge 44 \Rightarrow N \ge 50$ (так как $N \vdots 10$) – противоречие.
Если же в 11 Васиных группах равное число гирь, то $N \vdots 11 \Rightarrow N \vdots 110 \Rightarrow N \ge 110$ – противоречие.
4. Заметим, что наименьший круг, содержащий нетупоугольный треугольник, – это его описанный круг; для тупоугольного же треугольника это круг, построенный на его наибольшей стороне как на диаметре.
Пусть описанная сфера Ω нашего тетраэдра $ABCD$ имеет центр O и радиус R. Предположим, что O лежит вне тетраэдра или на его границе. Рассмотрим ближайшую к O точку X тетраэдра. Возможны два случая.
1. X лежит внутри некоторой грани (скажем, ABC). Тогда X является центром описанной окружности ω треугольника ABC, этот треугольник остроугольный, поэтому радиус ω есть $r \le 1$. При этом точки D и O лежат в разных полупространствах относительно ABC, и сфера с центром в X и радиусом r содержит сферическую шапочку сферы Ω, содержащую $ABCD$. Значит, эта сфера содержит и $ABCD$.
2. X лежит на ребре AB. Тогда проекция O_1 точки O на плоскость ABC лежит вне граней; более того, X является ближайшей к O_1 точкой треугольника ABC. Поэтому O_1 и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB, угол ACB тупой, и точка C лежит в шаре, построенном на AB как на диаметре (радиус этого шара по условию не превосходит 1). Аналогично, D лежит в этом шаре, поэтому шар содержит весь тетраэдр.
В обоих случаях тетраэдр поместился в шар радиуса 1.
Нам осталось разобрать только случай, когда O лежит внутри тетраэдра. В этом случае сумма объемов пирамид $ABCO$, $ABDO$, $ACDO$ и $BCDO$ равна V_{ABCD}, поэтому один из них не превосходит $V_{ABCD}/4$; пусть это объем пирамиды $ABCO$. Пусть луч DO пересекает плоскость ABC в точке D_1; тогда $\frac{1}{4} \ge \frac{V_{ABCO}}{V_{ABCD}} = \frac{OD_1}{DD_1}$, поэтому $OD_1 \le \frac{1}{3}OD = \frac{R}{3}$.

Рассмотрим ближайшую к O точку X на границе тетраэдра. Она не может лежать на ребре тетраэдра, потому что угол между одной из граней и отрезком OX будет острым. Значит, она лежит внутри одной из граней (скажем, ABC), является центром ее описанной окружности, и по доказанному выше $XO \le \frac{R}{3}$. Тогда радиус описанной окружности этой грани не менее $\sqrt{R^2 - (R/3)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$. Так как по условию он не больше 1, то $R \le \frac{3}{2\sqrt{2}}$, и мы нашли шар требуемого радиуса, содержащий тетраэдр.

5. Нет, не может.

Предположим, что такое возможно. Пусть a – простое число, $77 < a \le 150$, а b – число, стоящее в соседней но стороне клетке. Если уравнение $x^2 - bx + a = 0$ имеет два целых корня, то по теореме Виета их произведение равно a, а сумма равна $b > 0$. Значит, эти корни 1 и a, и $b = 1 + a$. Если же уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет два целых корня x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = b$; если при этом $x_1, x_2 \ge 2$, то $b = x_1(a - x_1) \ge 2(a-2)$, так как функция $t(a-t)$ возрастает при $t \le a/2$; значит, $b \ge 2a - 4 > 150$, что невозможно. Следовательно, в этом случае один из корней равен 1, и $b = 1 \cdot (a-1) = a - 1$.

Итак, для таких простых значений a возможны лишь два варианта числа, стоящего в соседней клетке: $b = a - 1$ и $b = a + 1$. Значит, у клетки с числом a только две соседних, и она – угловая. Однако существуют хотя бы 5 простых чисел a, находящихся между 77 и 150 (например, 79, 83, 89, 97, 101); все они не могут стоять в углах, так как углов всего 4. Противоречие.

XLII ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Теоретический тур

9 класс

1. 1) Масштаб по оси скорости 2 м/с, а по оси времени 1 с; 2) $v_A = 6$ м/с; 3) $s \approx 16$ м.

2. 1) Это график зависимости a^{-1} от v; 2) $t_0 = \frac{3}{2}\frac{v_0}{a_0}$; 3) $v = -v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a_0v_0t}$.

3. 1) $I_{\min} = 0$ при $R_x = 6R_1 = 18$ кОм; 2) $I_{\max} = \frac{U}{R_1} = 27$ мА при $R_x = 0$; 3) $R_x = \frac{10}{3}R_1 = 10$ кОм.

4. 1) Рассеивается 84%; 2) в 2,5 раза.

10 класс

1. 1) $v_0 = \frac{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}}{2}$; 2) таких точек две: слева и справа от мгновенной оси вращения; 3) $a_{Cy} = \frac{v_A^2 + v_B^2}{4r}$.

2. См. рис.12: 1) $x = L\cos\theta - \frac{A}{2}\sin 2\theta$, $y = L\sin\theta - A\sin^2\theta$, где $A = \frac{2mg}{k}\sin\alpha$, $0 \le \theta \le \pi$ при сжатии и $\pi \le \theta \le 2\pi$ при растяжении; 2) вся область внутри окружности радиусом L плюс область растяжения, как в случае 1).

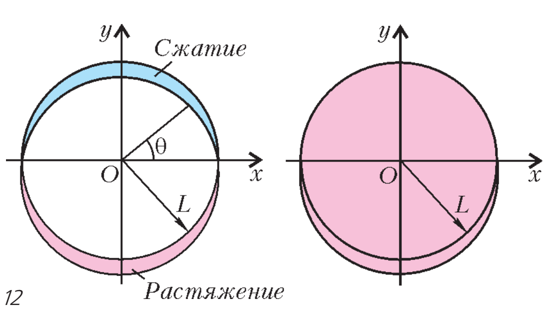

Рис. 12

3. 1) См. рис.13: $C = \frac{2\varepsilon_0 S}{l} = 0,89$ нФ; 2) $Q = \frac{\mathcal{E}^2\varepsilon_0 S}{2l} \approx 3,2$ мкДж.

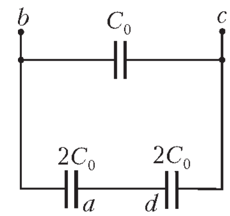

Рис. 13

4. 1) $v_{\min 1} = \sqrt{\frac{Qe}{2\pi\varepsilon_0 R m_p}} = 5,9 \cdot 10^5$ м/с; 2) $v_{\min 2} = \sqrt{2}v_{\min 1} = 8,3 \cdot 10^5$ м/с.

11 класс

4. $A = A_1 + A_2$; $A_1 = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1)$, где $\nu = \frac{p_1V_1}{RT_1}$ и $T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/7}$; $A_2 = p_1V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{5/7}$; окончательно, $A \approx 45,4$ кДж.

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, А.В.Жуков, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59