журнал© **Квант** ИЮЛЬ АВГУСТ 2009 №4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

TENEX В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»

Квант

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН
Издатель – ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

Линейка длиной в один нанометр

И.ЯМИНСКИЙ

Девочке Нана и мальчику Ноно объясняют, что такое нанометр. Сообразительная Нана улыбается. Ей все понятно. Нанометр — это одна миллиардная часть метра. В Ноно видно напряжение. С некоторой задержкой он спрашивает: а что такое метр? И тут большой педагогический такт проявляет третий персонаж — умудренный опытом профессор. Он не раздражается, не возмущается, а просто подходит к Ноно и показывает ему, что метр это примерно расстояние от пола до подбородка Ноно. Мальчик радуется, что он сам больше метра. Он все понял и уже готов бежать играть в футбол...

Так начинается тайваньский мультфильм «Фантастическое путешествие Нана и Ноно», который посвящен популярному рассказу о нанотехнологиях. И такое начало мультфильма не случайно. Нанотехнологии опираются на измерения, в которых нанометр играет ключевую роль. Именно о нанометре и будет рассказано в статье.

Введение

Всем известно, что метр – это основная единица длины. Он был введен во Франции в XVIII веке и определялся как одна сорокамиллионная часть длины Парижского медиана. В 1799 году из сплава платины и иридия был изготовлен первый эталон метра.

При выборе метра в качестве единицы длины руководствовались, в частности, такими важными соображениями, как удобство использо-

В Токио перед огромным выставочным залом, где ежегодно проходит международное шоу по нанотехнологиям, сооружена сорокаметровая пила, наполовину вкопанная в землю. Это памятник большой труженице обычных технологий. Нанотехнологии же призваны конструировать новые устройства и материалы, собирая их, как в конструкторе, из атомов и молекул.

Эта статья опубликована в рамках договора с ГК «РОСНАНОТЕХ».

Немного истории

Когда метрология была без приставки «нано»

Издревле большинство мер длины строились исходя из удобства их использования. Например, старорусская сажень, или прямая сажень, была равна расстоянию от конца пальцев одной вытянутой по горизонтали руки до конца пальцев другой вытянутой руки. По указу Николая I, в 1835 году были приведены в соответствие русские и английские меры длины. Он положил, что одна сажень должна равняться семи английским футам (от английского foot – ступня). При переводе в метры получается, что 1 прямая сажень равна 2,1336 метра.

Косая сажень — еще одна старорусская единица длины, равная 2,48 метра. Первоначально косая сажень определялась как расстояние от пальцев левой ноги до кончиков пальцев вытянутой по диагонали правой руки.

Это были удобные в применении меры. Однако, используя их, получали ... различные длины.

О необходимости и важности аккуратных и точных измерений хорошо понимал Дмитрий Иванович Менделеев, который был первопроходцем не только в создании периодической системы элементов. Ему было очевидно, что в обществе с растущим промышленным производством вопрос измерений и метрологии принимает ключевое значение. Развитие железнодорожного транспорта, становление заводов и фабрик, вхождение России в мировую экономику требовали решения задач единства измерений. Необходимы были серьезные усилия, чтобы килограммы, граммы, метры, сантиметры, миллиметры и дюймы везде были одинаковыми.

С 1892 года и до конца своей жизни Д.И.Менделеев возглавлял первое научное метрологическое учреждение России – Главную палату мер и весов. Ее задачей было обеспечение единства мер и создание надежных методов измерений и их эталонов, а также обеспечение единообразия и верности применяемых мер и измерительных приборов. Теперь это Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии, носящий имя Д.И. Менделеева. Палата, а ныне институт расположены в Санкт-Петербурге. Благодаря усилиям Д.И.Менделеева, в 1900 году в Москве при Московском окружном пробирном управлении была создана Поверочная палатка торговых мер и весов №3. Сейчас это Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы (предприятие федерального значения). Его эмблема – буква М (первая буква в слове МЕТРОЛОГИЯ), опоясывающая земной шар и одновременно опирающаяся на него. Хорошая символика для того, чтобы показать, насколько важна метрология для всех нас.

Легенда об овсе и не только...

«Если вы в Санкт-Петербурге купили два пуда овса, а потом на санях привезли в Москву и там взвесили овес и обнаружили, что весы показывают всего полтора пуда, вот будет горе. Но если вы – предприимчивый торговец, то горе поправимо. Покупаете в Москве 100 пудов овса, а в Санкт- Петербурге продаете их как 133 с небольшим пуда. Чтобы быть предприимчивым торговцем, вам придется еще посмотреть на разницу в цене на овес в Москве и Санкт-Петербурге. Посчитать, сколько надо будет взять овса, чтобы прокормить лошадь. Оценить стоимость собственного труда. И не забыть про амортизацию оборудования – износ подков лошади и полозьев саней».

«История» с дюймом

С нанометрами надо вести себя аккуратно. А то могут произойти всякие истории, какие имели место с метром. Впрочем, даже не с метром, а с дюймом. Кстати сказать, почему-то нанодюйм не так популярен, как нанометр. Наверное, потому, что нанодюйм почти в 40 раз меньше, чем нанометр, и на порядок меньше размера атома.

Но вернемся к обещанной истории с дюймом.

Происходило это во времена большой космической гонки между СССР и США. Обе сверхдержавы спешили быть первыми. Возможно, для ускорения процесса создания космической ракеты американцы две половинки ракеты делали в разных местах. Когда две половинки оказались в одном месте

вания и применения. В наше время, в XXI веке, многие исследования ведутся на масштабе нано. Способ производства, когда материалы и устройства конструируются и собираются из отдельных атомов и молекул, принято называть нанотехнологиями. Для нанотехнологий

Палата мер и весов – НИИ метрологии им. Д.И.Менделеева

метр слишком большая единица измерения длины. Подходящей величиной здесь может служить нанометр.

С точки зрения математики, все очевидно: 1 нм = 10^{-9} м , и, казалось бы, нет ничего проще. Однако на практике возникают сложные вопросы. И первый из них – как изготовить линейку с расстояниями между рисками длиной в один нанометр. Действительно, метр является универсальной первичной единицей для измерения длин и имеет свой эталон. Нанометр появляется как производная от метра единица длины. А как сделать вторичный эталон – для нанометра? Этот вопрос относится к области нанометрологии и имеет принципиальное значение для нанотехнологий.

«Хочешь создавать – научись мерить», – это слова знаменитого русского ученого Дмитрия Ивановича Менделеева, внесшего огромный вклад в создание метрологической службы в России. В полной мере его слова справедливы и для нанотехнологий.

Итак, дальнейший рассказ будет о том, как сделать линейку для измерений длин в нанодиапазоне.

Как поделить метр на миллиард нанометров?

Нанотехнологии – это искусство создавать новую продукцию, размеры которой находятся в области нанометрового диапазона. Если серьезно заниматься производством таких изделий, то нужно очень хорошо научиться измерять эти самые нанометры. Для этого необходим не только удобный, но и однозначный эталон длины.

Вроде бы, все просто: чтобы получить нанометр, надо распилить один эталонный метр на один миллиард равных частей. Если потом миллиард человек получат по одному нанометру, разойдутся по разным частям света, а затем, спустя много времени, вновь соберутся в одном месте, приложат все свои нанометры друг к другу и убедятся, что их нанометры одинаковой длины, – вот будет здорово. И означать это «здорово» будет многое. Во-первых, что вначале метр порезали точно на равные части. Во-вторых, что во время странствий нанометр не поизносился, не поистерся и не растянулся. В-третьих, что такие нанометры можно использовать как меру длины и что два человека, измеряющие один и тот же предмет «разными» нанометрами, получат одни и те же результаты. Однако осуществить такое не удастся, поскольку, как только мы начнем пилить метр, появится стружка, а ширина каждого пропила может вообще оказаться больше одного нанометра, т.е. весь наш труд уйдет в опилки. Можно попробовать разрезать метр ножом так, чтобы не было опилок, но как это сделать?

Вернемся опять к метру. Метр – это единица измерения длины, и равен он, в соответствии с современным определением, расстоянию, которое проходит свет за промежуток времени, равный $1/299792458$ секунды. Эталонный метр теперь привязали ко времени и к скорости света. Сделали это в 1983 году и сделали потому, что измерения времени сегодня относятся к самым точным измерениям, а скорость света есть одна из фундаментальных и постоянных величин. Таким образом, теперь, вместо того чтобы метр разрезать на части, надо промежуток времени поделить на миллиард частей. Тогда получается, что

1 нанометр равен расстоянию, которое проходит свет за $1/29979245800000000$ секунды.

Если мы хотим измерять нанометр с точностью хотя бы 1%, то промежуток времени придется определять с ошибкой не более чем $3\cdot10^{-20}$ секунды. Сейчас национальные метрологические центры США, Германии и Франции, имеющие в своем распоряжении эталоны на основе цезиевых фонтанов, ведут работы над стандартами частоты на основе оптических излучателей, использующих одиночный ион изотопа иттербия $^{171}_{70}\mathrm{Yb}$, захваченный магнитной или электрической ловушкой. Осуществленные оценки уже показывают, что относительную погрешность измерений времени можно уменьшить до $1\cdot10^{-19}$. Иными словами, в принципе можно измерить один нанометр с точностью 3%.

Простой рецепт изготовления нанометра

Давайте подумаем, как в домашней лаборатории сделать простой и надежный эталон в 1 нанометр. Казалось бы, эта задача непосильна в условиях, когда у нас нет практически ничего, кроме нашего желания сделать эталон. Если мы пойдем по пути применения стандартов частоты или измерения сверхкоротких промежутков времени – будет именно так. Но для создания нашего эталона длины в 1 нанометр есть возможность выбрать другой путь. И как вы скоро убедитесь – путь не только очень простой, но обеспечивающий высокую точность изготовления нанометра.

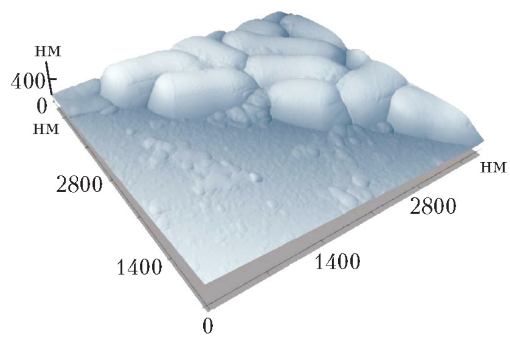
Итак, переходим к описанию рецепта изготовления эталона в 1 нм. Нам понадобятся батарейка, пластинка из пьезокерамики с электродами, два электрических сопротивления и соединительные провода. Все, кроме пьезопластинки, найти несложно. Перед тем как отправиться на поиски пьезопластинки, давайте разберемся, что она из себя представляет. Такие пластинки обычно изготавливают из пьезокерамики, например цирконата-титаната свинца, в виде сплющенной шайбы. На противоположные торцы шайбы наносят металлические электроды. Для нас подойдет шайба размеров монеты в 1 копейку.

А чем хороша пьезокерамика? Если пьезокерамику поместить в электрическое поле, то ее размеры изменятся. Происходит это по причине обратного пьезоэффекта. Прямой пьезоэффект проявляется в возникновении электрической разности потенциалов на электродах пьезопластинки, если эту пластинку подвергнуть механическому воздействию – сжатию или растяжению. Обратный пьезоэффект состоит в изменении длины стержня под действием приложенного к нему электрического напряжения. Оба эти эффекта впервые были обнаружены братьями Жаком и Пьером Кюри в 1878 году на кристалле кварца. Кстати сказать, на принципе обратного пьезоэффекта устроен электрический звонок в мобильных телефонах или наручных часах.

и их попытались соединить, оказалось, что их диаметры отличаются на... целый дюйм. Составить из двух половинок одно целое сразу не удалось. Произошла заминка, повлекшая отставание американцев, и наша космическая ракета в очередной раз стартовала первой. Была ли ошибка в документации или дюймы были разные, теперь никого не интересует. Тогда, как и всегда, каждому хотелось быть первым.

Есть ли нанометрология в живой природе?

Природные нанотехнологии, которые так успешно работают в живой природе в течение многих миллионов лет эволюции, к размерам относятся очень аккуратно. Так, сборка некоторых белков осуществляется с точностью, превышающей $1/10$ нанометра.

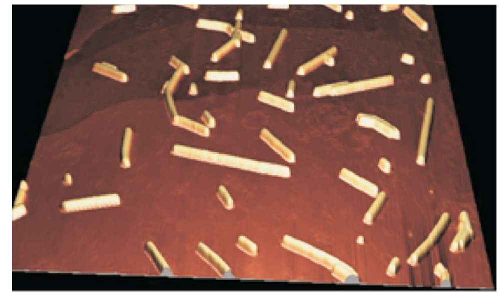


Бактерия Helicobacter pilory

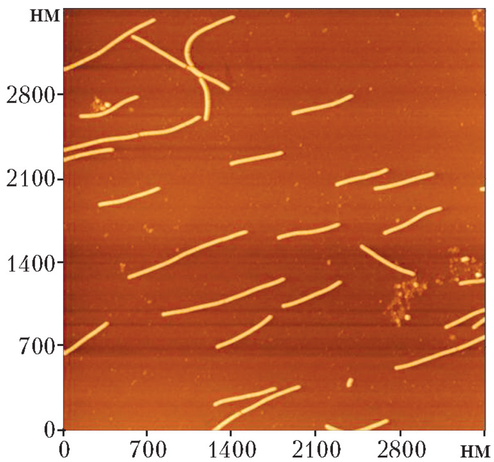
Можно сказать, что многие процессы молекулярного узнавания в биологических системах построены на весьма точном взаимном расположении атомов и молекул. Например, геометрия антител – белковых молекул, которые позволяют обнаруживать чужеродные частицы антигены, – является дополнительной к этим самым антигенам. При объединении друг с другом они образуют новый макромолекулярный комплекс без лишних «зазоров».

Это только один пример, таких примеров в живой природе очень много.

Хорошо изученный вирус табачной мозаики представляет собой молекулу РНК в форме спирали с окружающей ее белковой оболочкой. Он имеет форму продолговатой палочки диаметром 18 нм и длиной около 300 нм. Вот такая миниатюрная частица



Вирус табачной мозаики



Вирус картофеля

может доставить очень много неприятностей табаку, помидорам и другим растениям.

Растения, как и мы, подвержены вирусным заболеваниям. К нашему счастью, вирусы растений не представляют никакой опасности человеку. По крайней мере, можно констатировать, что обратное никто никогда не демонстрировал. Поэтому, например, мы можем спокойно съесть картофель, пораженный X вирусом картофеля. Буква X здесь обозначает тип вируса. Есть также A вирус картофеля и B вирус картофеля. X вирус картофеля, как и вирус табачной мозаики, имеет, нитевидную форму, только он поуже и подлиннее: 14 нм в диаметре при длине 1 микрон.

Кстати, было высказано предложение использовать вирус табачной мозаики как эталон 18 нанометров, а X вирус картофеля – как эталон 14 нанометров.

Современные системы навигации

Современные системы навигации GPS и ГЛОНАСС работают с точностью измерения частоты и, соответственно, промежутка времени с относительной погрешностью $1 \cdot 10^{-13}$.

GPS – сокращение английских слов **G**lobal **P**ositioning **S**ystem, т.е. глобальная система позиционирования. Полное название этой спутниковой системы навигации – NAVSTAR GPS (NAVigation Satellites providing Time And Range – навигационные спутники, обеспечивающие измерение времени и расстояния; глобальная система позиционирования). Эта система создана Министерством обороны США для точного определения координат и скорости объектов.

Российская спутниковая система навигации – **ГЛО**бальная **НА**вигационная **С**путниковая **С**истема, или сокращенно ГЛОНАСС.

Если у вас дома есть GPS-приемник, то вы можете подумать о привязке одного миллиметра к метру с помощью этого общедоступного эталона частоты и о проверке расположения насечек на домашней линейке с

Правило обратного пьезоэффекта очень простое – изменение размеров пьезопластиники ΔD прямо пропорционально приложенному напряжению ΔU:

$$\Delta D = d_{33}\Delta U,$$

где коэффициент пропорциональности d_{33} – пьезоэлектрический модуль. Использование двух цифр в индексе модуля показывает, что напряжение в общем случае мы можем прикладывать по одному из трех направлений (вдоль осей координат X, Y или Z), а изменение размеров – наблюдать по любому другому направлению. В нашем случае направление электрического поля совпадает с направлением перемещения, поэтому используются две одинаковые цифры 3. Как легко подсчитать, всего у пьезоэлектрического модуля 9 компонентов: $d_{11}, d_{12}, d_{13}, \ldots, d_{33}$. (Такие физические величины называются тензорами второго порядка.)

Возьмем керамику с пьезоэлектрическим модулем $d_{33} = 200 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н $= 200 \cdot 10^{-12}$ м/В. Если мы приложим к электродам напряжение 5 В, то изменение размеров пластинки составит 1 нм. Заметьте, что изменение размеров пьезопластинки не зависит от толщины самой пластинки. И это очень хорошо, ибо, создавая эталон длины, мы не должны думать о длине самого эталона.

Таким образом, для нашего нанометра мы уже можем сформулировать главный тезис:

нанометр – это расстояние, на которое изменяется размер пластинки, изготовленной из пьезокерамики с пьезоэлектрическим модулем $d_{33} = 200 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н $= 200 \cdot 10^{-12}$ м/В, при приложении к ее электродам напряжения 5 В.

В нашем эталоне мы использовали именно такие пьезопластинку и батарейку. Если у батарейки напряжение больше 5 В, то нам понадобятся два электрических сопротивления, с помощью которых мы сделаем делитель напряжения с выходом 5 В. А если мы найдем пьезокерамику с другим значением пьезоэлектрического модуля, то, подбирая на делителе нужное напряжение, мы сможем и для этого случая выполнить условие $\Delta D = 1$ нм.

Маленькие хитрости есть в каждом деле

В изготовлении нашего нанометра есть свои «хитрости». Вот первая. Если мы используем пьезопластинку, изготовленную из пьезокерамики с пьезоэлектрическим модулем $d_{33} = 200 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н, то после каждого приложения напряжения 5 В размер пластинки будет изменяться на 1 нм. Между приложениями напряжений очень важно не забывать обкладки пластинки замыкать проводником. Пьезокерамика – очень хороший изолятор: будучи приложенным к обкладкам единожды, напряжение будет держаться на них достаточно долго. Это может длиться и часы, и сутки, все зависит от влажности воздуха и чистоты поверхности пластинки. Замыкая электроды пластинки проводником, мы позволяем отрицательному заряду стечь по проводнику на противоположную обкладку таким образом, чтобы напряжение на пластинке стало равным нулю и пластинка вернулась к исходным размерам.

И еще одна важная «мелочь». Электрическое напряжение можно прикладывать так, чтобы пьезопластинка становилась толще, или так, чтобы пластинка становилась тоньше. Иными словами, батарейку можно подключать плюсом на верхний электрод, а можно – плюсом на нижний электрод. В обоих случаях пластинка будет менять свой размер на 1 нм. Есть ли разница в том, как прикладывать напряжение? Чтобы ответить на этот вопрос, надо рассказать, как изготавливают пьезокерамику.

Пьезокерамику делают из порошка, который спекают при высокой температуре и лучше при высоком давлении. При этом получается твердый материал, который на микроскопическом масштабе состоит из отдельных зерен. В каждом зерне положительные заряды слегка смещены относительно отрицательных (в целом зерна электрически нейтральны), и это смещение зарядов приводит к тому, что у зерна появляется дипольный момент. Попадая в электрическое поле, такое зерно будет растягиваться или сжиматься.

В свежеиспеченной пьезокерамике дипольные моменты отдельных зерен имеют случайные направления, обратный пьезоэффект наблюдается для каждого зерна в отдельности, а направленное перемещение пластины в целом отсутствует. В постоянном электрическом поле часть зерен растянется, а часть сожмется в направлении поля, но в целом размер пьезокерамического образца не изменится.

Чтобы вызвать направленное перемещение, все дипольные моменты отдельных зерен нужно сориентировать одинаковым образом. Для этого пьезокерамику помещают в электрическое поле напряженностью 1000 В/мм и более и нагревают до температуры около 300 °С. Этот процесс называется поляризацией керамики. Перегревать керамику нельзя, потому что при некоторой температуре (точка Кюри) пьезоэффект пропадает. Если поляризация проведена успешно, то все зерна имеют дипольные моменты, направленные в одну сторону, при этом поляризующее поле растягивает керамику. Если же приложить электрическое поле противоположного направления, то будет происходить процесс деполяризации, сжимающий керамику.

Вот здесь и кроется ответ на наш вопрос, как надо прикладывать напряжение в эталоне нанометра – чтобы керамика растягивалась или сжималась. Правильный ответ такой. Если мы хотим избежать возможной деполяризации керамики, то напряжение надо прикладывать таким образом, чтобы всегда происходило только удлинение пластинки.

Поверяем нанометр и становимся нанометрологами

У пьезокерамики есть ряд недостатков – нелинейность, гистерезис, крип. Нелинейность проявляется в отклонении от простой формулы $\Delta D = d_{33}\Delta U$. Гистерезис обусловлен «памятью» материала к предыстории прикладываемого напряжения, в результате чего может оказаться, что при одном и том же приложенном напряжении удлинения пластинки будут разными. Вследствие крипа, или ползучести, удлинение пьезокерамики может отставать во времени от приложенного напряжения.

Будут ли эти эффекты снижать точность нашего эталона нанометра? Практически нет, если к электродам эталона строго периодически прикладывать только два значения электрического напряжения: 5 В и 0 В. Все недостатки пьезокерамики – нелинейность, гистерезис, крип – присутствовать будут, но их вклад будет все время одним и тем же. А если так, то, аккуратно выбирая напряжение, мы можем добиться удлинения пьезопластинки точно на один нанометр.

Завершая наш рассказ, отметим, что если вы не сумели изготовить свой собственный эталон нанометра, но все поняли в данной статье, то можно считать, что вы уже состоявшийся нанометролог. (Ведь не каждый же нанометролог пользуется самостоятельно изготовленным наноэталоном.) Если же вы потрудились, нашли пьезопластинку и соорудили свой нанометр, то можно сказать, что вы самый передовой нанометролог.

За рамками статьи остался очень важный вопрос: как убедиться, что наша пластинка удлиняется точно на один нанометр? Другими словами, каким образом осуществить привязку созданного нанометра к первичному эталону метра? К сожалению, эту процедуру в домашних условиях сделать нельзя. Надо обратиться в метрологическую службу, и там с помощью интерферометра смогут точно определить перемещение пластинки. Как это делается – тема для другой статьи.

точностью чуть лучше чем 1%. До нанометра с помощью системы GPS пока приблизиться не удается.

Экономика изготовления нанометра

Возможно, у вас остается пока нерешенным вопрос, где найти пьезокерамичекую пластинку. На самом деле, такие пластинки буквально окружают нас в нашей повседневной жизни. Звонки в часах, мобильных телефонах и компьютерах часто изготавливают именно из пьезокермачеських пластин. Правда, в них есть одна особенность. Там пьезопластинки приклеивают к упругой металлической пластинке. В результате этого при изменении размеров пьезопластинки такая клееная конструкция совершает дополнительный изгиб и центр конструкции перемещается на гораздо большее расстояние, чем свободная пластинка. Поэтому если мы хотим получить перемещение в 1 нм, то лучше использовать просто пьезокерамическую пластинку – иначе прикладываемое напряжение должно быть существенно меньше да и стабильность такой системы гораздо меньше. Кроме того, за счет разницы температурных коэффициентов пьезокерамики и металла клееная конструкция будет дополнительно изгибаться при изменении температуры окружающей среды.

Где же найти правильную пьезопластинку? Оказывается, они продаются в магазинах электронных аксессуаров. Стоимость одной пластинки – около 10 рублей.

Тогда можно подсчитать бюджет нашей разработки эталона нанометра: батарейка – 40 руб., провода – 8 руб., пьезопластинка – 10 руб., поиск и заказ пластинки в Интернете (оплата трафика) – 35 руб., доставка пьезопластинки (если вы не поедете сами) – 150 руб., собственный труд – оцените сами.

Вот такая экономика изготовления эталона в один нанометр.

Любопытно, что ...

...если вы взгляните на себя в зеркало, то за это время каждый волосок вашей шевелюры удлинится на один нанометр.

...если водой из озера Байкал заполнить половину объема железнодорожной цистерны, то уровень воды в озере упадет почти на один нанометр.

...монету достоинством в 1 копейку бросили в бассейн, при этом уровень воды повысился на 1 нм. Каковы размеры бассейна?

...ученые научились делать золотые нити толщиной в один атом. При этом на длине 1 нанометр целиком укладываются 3 атома золота.

Почему углеродные нанотрубки прочнее стали?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Углерод встречается в природе в виде нескольких полиморфных модификаций (аллотропов). Два из них широко известны – это графит и алмаз. Углеродная нанотрубка тоже является модификацией углерода и представляет собой гигантскую молекулу из атомов углерода.

Нанотрубки могут быть вложены одна в другую – тогда их называют многослойными. На рисунке 1 изображены продольные сечения пятислойной, двухслойной и семислойной

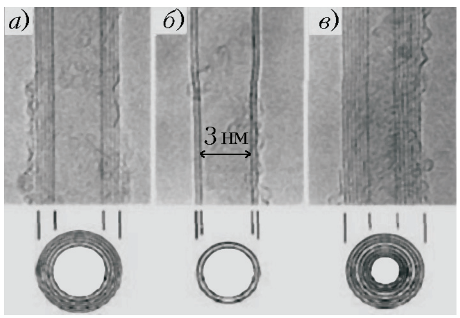


Рис. 1

нанотрубок, полученные с помощью электронного микроскопа, а на рисунке 2 представлено изображение поверхности

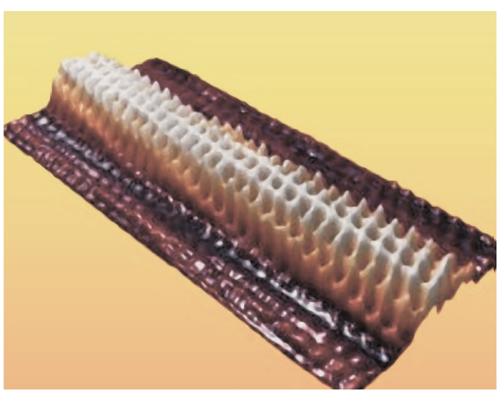


Рис. 2

однослойной нанотрубки, полученное с помощью сканирующего зондового микроскопа.

Прочность на разрыв углеродных нанотрубок, измеренная экспериментально, очень большая и составляет около 60 ГПа. А вот прочность стали – примерно 0,8 ГПа. Почему же нанотрубки почти в сто раз прочнее стали? Попробуем вычислить прочность одностенной нанотрубки, схематично показанной на 4-й странице обложки. Там шариками обозначены атомы углерода, а соединяющими их линиями – ковалентные связи между этими атомами. У такой трубки одна треть С-С связей ориентирована вдоль ее оси. Закрепим невидимый конец трубки, а к другому ее концу приложим растягивающую силу F. Пусть в нанотрубке атомы углерода образуют между собой одинаковые связи и углы между ними составляют 120°. Тогда при растяжении нанотрубки эти связи будут растягиваться одинаково. Однако разорваться нанотрубка может самым причудливым образом, зависящим, например, от того, какая именно связь разорвется первой. Чтобы упростить расчеты, предположим, что растяжение разрывает только С-С связи, ориентированные вдоль оси трубки и расположенные в одной плоскости ее поперечного сечения. Известно, что расстояние между ближайшими атомами углерода в нанотрубке приблизительно равно d = 0,15 нм. Легко показать, что если диаметр трубки равен D, то количество связей, ориентированных вдоль оси трубки, равно $N = \frac{\pi D}{d\sqrt{3}}$. При этом к каждой С-С связи приложена сила, равная $\frac{F}{N}$. Прочность одной С-С связи можно найти из графика зависимости потенциальной энергии этой связи от расстояния между атомами (рис.3). Из графика видно, что потенциальная энергия связи достигает минимума, когда расстояние между ядрами атомов составляет 154 пм. Это и определяет расстояние, на котором находятся атомы углерода в нерастянутой нанотрубке. Тангенс угла наклона каса-

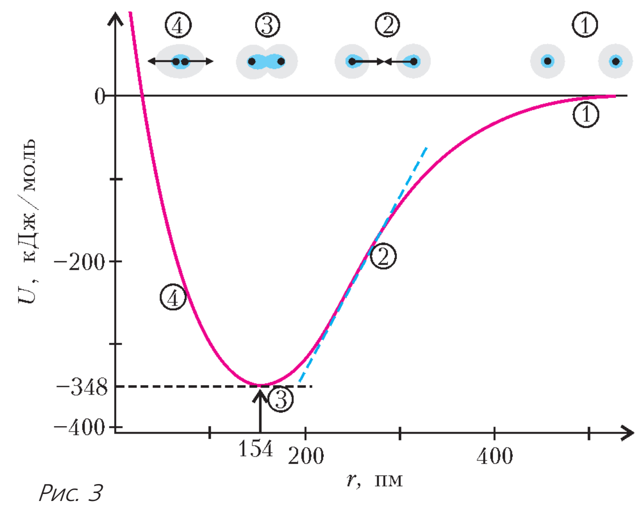


Рис. 3

тельной к правой ветви кривой пропорционален силе F_1, необходимой для того, чтобы удерживать атомы на данном расстоянии r. Отсюда находим $F_1 = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{1}{N_A}$, где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро. Чтобы увеличить расстояние между атомами углерода, надо приложить бо́льшую силу. А если она будет больше силы, соответствующей максимальному тангенсу угла наклона (см. синий пунктир на рисунке 3), то связь порвется. Иными словами, связь порвется при

$$F > \frac{348 \cdot 10^3 \ \text{Дж/моль}}{154 \cdot 10^{-12} \ \text{м} \cdot 6 \cdot 10^{23} \ 1/\text{моль}} = 3{,}8 \ \text{нН}.$$

Понятно, что если в одностенной нанотрубке число параллельных оси С-С связей в одном поперечном сечении равно N, то нанотрубка разорвется, когда растягивающая ее сила станет больше $N \cdot 3{,}8$ нН. Пусть $D = 1{,}5$ нм, тогда $N = 18$ и $F_{max} = 18 \cdot 3{,}8 \text{ нН} \approx 69 \text{ нН}$. Чтобы вычислить предел прочности σ_{max} нанотрубки, разделим F_{max} на площадь поперечного сечения $S = \pi D^2/4$:

$$\sigma_{max} = \frac{4F_{max}}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 69 \cdot 10^{-9}}{3{,}14 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-18}} \ \text{Па} = 39 \ \text{ГПа}.$$

Полученное нами значение σ_{max} довольно близко к экспериментально найденным величинам (63 ГПа) и, как и следовало ожидать, гораздо больше прочности самых прочных сортов стали (0,8 ГПа).

(Продолжение см. на с.43)

Этот материал опубликован в рамках договора с ГК «РОСНАНОТЕХ».

Арифметика многогранников

Г.ПАНИНА

– Сложению тебя обучили? – спросила Белая Королева.
– Сколько будет один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один?
– Я не знаю, – ответила Алиса. – Я сбилась со счета.
– Сложения не знает, – сказала Черная Королева.
– А Вычитание знаешь? Отними из восьми девять.
– Этого я не знаю, но зато...
– Вычитания не знает, – сказала Белая Королева.

Л. Кэрролл. Алиса в Зазеркалье

Введение

Сначала мы научимся складывать многоугольники на плоскости и многогранники в трехмерном пространстве. Операция сложения многогранников и вообще произвольных фигур была введена немецким математиком Германом Минковским (1864–1909) и изучается в университетских курсах.

А затем мы научим вас тому, что покажется на первый взгляд невозможным – вычитать многоугольники и многогранники. Кажущаяся невозможность вычитания не должна нас смутить – ведь каждый из нас был в свое время убежден, что нельзя из восьми вычесть девять. Вычитание многогранников в чем-то напоминает переход к отрицательным числам, но конструкция здесь возникает гораздо забавнее – многогранники как бы выворачиваются наизнанку, принимают довольно причудливые формы (например, взгляните на рисунки 6 и 12,*б*).

Какая польза в умении складывать и вычитать многогранники? Вообразите, что вам нужно решить обычную школьную задачку (например, про бассейн с трубами или про двух землекопов), но при этом запрещено складывать и вычитать числа. Скорее всего, решить задачу вы не сможете – будут связаны руки.

Так же и с другими объектами математики. Каждый раз, когда удается придумать разумную операцию сложения (вычитания, умножения ...) для необычных объектов, это большой прогресс, дающий рабочий инструмент. Например, математики умеют складывать и вычитать точки на кривой, петли на поверхности, или, как в этой статье, многогранники. Кстати, здесь же нам придется научиться складывать и вычитать пружинные графы на сфере.

В статье нет доказательств, зато много примеров. Мы предлагаем читателю рассмотреть самостоятельно дополнительные примеры, экспериментировать, вначале поверить в утверждения, а только потом думать о доказательствах.

Математика – экспериментальная наука!

Складываем многоугольники на плоскости

Белая Королева охнула и закрыла глаза.
– Прибавить я еще могу, – сказала она, – если мне дадут подумать. Но отнять – ни под каким видом!

Итак, мы живем на плоскости, где введена декартова система координат (x, y) с началом в точке O. Это дает нам право на каждую точку a смотреть одновременно и как на точку, и как на вектор $\overrightarrow{Oa}$. Поэтому всякий раз, когда мы будем писать о сумме точек, будем иметь в виду сумму соответствующих векторов.

Выпуклым многоугольником на плоскости мы называем выпуклую оболочку непустого конечного множества точек. Важно, что у нас точка и отрезок тоже считаются многоугольниками.

Определим на множестве выпуклых многоугольников операцию сложения по Минковскому.

Определение 1. Пусть K и L – выпуклые многоугольники. Их *суммой Минковского* называется множество точек

$$K + L = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in K, \boldsymbol{y} \in L\}.$$

Вот простейшие свойства суммы Минковского.

(1) Сумма двух многоугольников – выпуклый многоугольник.

(2) Если один из многоугольников, скажем $L = \{a\}$, состоит из одной точки, то $K + L$ – параллельный перенос многоугольника K на вектор a.

(3) «Одноточечный» многоугольник $\mathbb{0} = \{O\}$, где O – начало координат, играет роль «нуля»: сумма $K + \mathbb{0}$ всегда равна K.

(4) Если слагаемые K и L переместить с помощью параллельных переносов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{t}$, то их сумма перенесется параллельно на вектор $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{t}$.

Поэтому имеет смысл отождествлять многоугольники, отличающиеся на параллельный перенос. Или иначе, когда мы вычисляем сумму Минковского, мы можем поместить начало координат туда, куда нам удобно (как правило, удобно в вершину одного из многоугольников).

(5) Для поворотов предыдущее утверждение неверно. Если повернуть одно из слагаемых, сумма изменится уже существенно.

Пример 1. Сумма Минковского двух непараллельных отрезков – параллелограмм (рис.1).

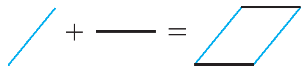


Рис. 1

Пример 2. Сумма Минковского двух параллельных отрезков – отрезок суммарной длины.

Пример 3. Сумма Минковского треугольника и отрезка, параллельного одной из сторон, – трапеция (рис.2).

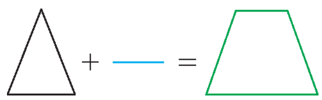


Рис. 2

Пример 4. Еще один пример – сумма пятиугольника и треугольника (рис.3). В данном случае это семиугольник. Однако если чуть повернуть треугольник (а пятиугольник оставить прежним), то суммой будет восьмиугольник, так как параллельные стороны пятиугольника и треугольника перестанут быть параллельными.

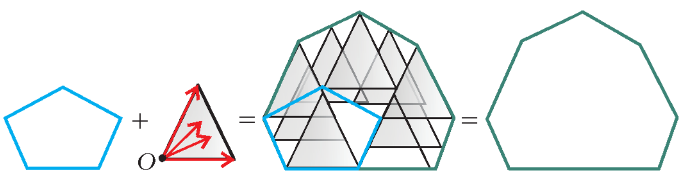


Рис. 3

Поглядев на приведенные примеры, можно подметить, что ломаная, ограничивающая суммарный многоугольник $K + L$, составлена из ребер многоугольников K и L. Говоря точнее, сумму Минковского многоугольников можно вычислить, следуя такому алгоритму (рис.4):

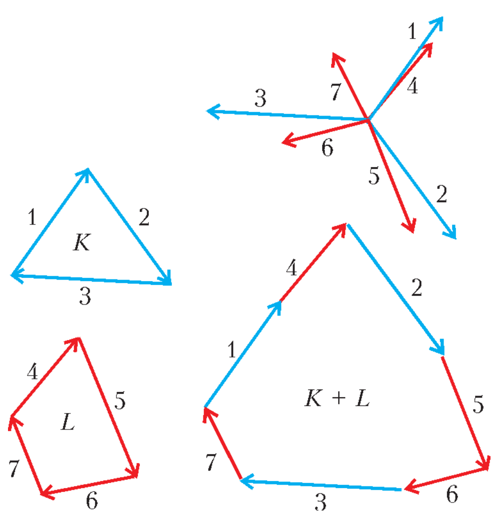


Рис. 4

• Превратим каждое ребро многоугольников K и L в вектор, нарисовав на нем стрелку. Полученные векторы должны обходить многоугольники по часовой стрелке.

• Отложим все векторы от начала координат. Получится так называемый общий *букет векторов* для обоих многоугольников.

• Может оказаться, что два вектора из букета имеют общее направление. Тогда эту пару векторов нужно заменить на их сумму.

• Двигаясь по часовой стрелке, берем по очереди векторы из букета и откладываем один за другим (первый вектор – от произвольно выбранной точки на плоскости, каждый следующий вектор – от конца предыдущего). Получается ломаная линия.

• Ломаная замкнется. Она ограничивает сумму Минковского многоугольников K и L.

Задача 1. Пусть K – выпуклый многоугольник. Убедитесь, что $K + K$ есть многоугольник K, растянутый гомотетией в 2 раза.

Вычитаем многоугольники

– Пойду-ка я к Королеве навстречу, – сказала Алиса.

Конечно, ей интересно было поболтать с цветами, но разве их сравнишь с настоящей Королевой!

– Навстречу? – переспросила Роза. – Так ты ее никогда не встретишь! Я бы тебе посоветовала идти в обратную сторону!

Разность Минковского определить невозможно, если ограничить себя только выпуклыми многоугольниками. Действительно, при сложении многоугольники не становятся меньше (точнее говоря, сумма K и L содержит параллельный перенос каждого из слагаемых – это хорошо видно на рисунке 3). Поэтому вычесть из маленького многоугольника большой невозможно: в этом случае маленький многоугольник содержал бы параллельный перенос большого.

Как же разумно расширить класс выпуклых многоугольников так, чтобы сделать возможным вычитание? Если взять определение суммы и попробовать помудрить с ним, приспособив для вычитания, то ничего хорошего не выйдет (попробуйте!).

Имеется универсальный алгебраический прием: разностью двух многоугольников K и L будем называть формальное выражение $(K - L)$, не придавая последнему никакого геометрического смысла. Два таких выражения $(K - L)$ и $(M - N)$ будем считать равными, как только $K + N = M + L$. Несложно проверить, что такие формальные выражения можно складывать (по правилу $(K - L) + (M - N) = ((K + M) - (L + N))$, и у каждого $(K - L)$ есть обратный элемент $(L - K)$.

Этот прием вам уже встречался раньше на уроках математики – при переходе от положительных чисел к отрицательным или от целых чисел к рациональным дробям.

Однако нам хочется иметь дело не с формальными разностями, а с геометрическими объектами. Почему так? Дело в том, что многоугольник (или многогранник в пространстве) имеет богатую геометрическую структуру: у него есть ребра, вершины, понятие площади и т.д. Хотелось бы иметь все это богатство и для разностей Минковского.

С этой точки зрения, плодотворным оказалось приспособить для вычитания многоугольников алгоритм суммирования. Для вычисления разности нам (как и Алисе) надо кое-где поменять направления векторов на противоположные.

Итак, разность двух многоугольников $K - L$ мы определим алгоритмически:

• Построим многоугольник L', центрально симметричный многоугольнику L относительно начала координат.

• Превратим каждое ребро многоугольников K и L' в вектор, нарисовав на нем стрелку.

Полученные векторы должны обходить многоугольник K по часовой стрелке, а многоугольник L' – против часовой стрелки.

• Как и раньше, отложим все векторы от начала координат. Получится *букет векторов* для обоих многоугольников, но на этот раз необходимо помнить, откуда эти вектора пришли – от K или от L. На рисунке 5 красные векторы – бывшие ребра многоугольника K, а синие – многоугольника L'.

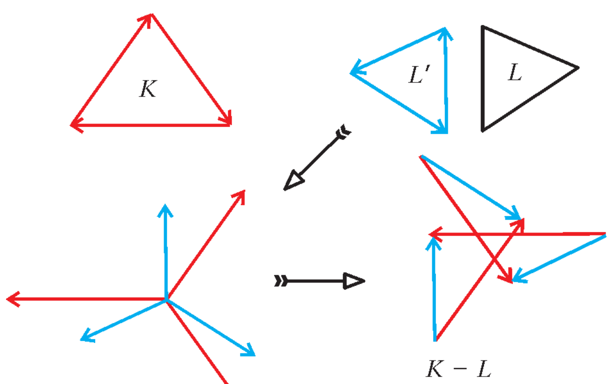


Рис. 5

• Может оказаться, что два вектора из букета имеют общее направление. Пусть для определенности это красный и синий векторы, причем красный вектор длиннее. *Тогда эту пару векторов нужно заменить на разность красного и синего векторов и покрасить в красный цвет. Если синий вектор длиннее, то все нужно сделать наоборот. А если векторы равной длины, то просто оба вектора нужно удалить из букета.*

• Двигаясь по букету по часовой стрелке, мы откладываем векторы по очереди один за другим. *Если векторы разных цветов, то их нужно отложить с нарушением направления (не начало к концу, а начало к началу или конец к концу).* А если два последующих вектора одного цвета, то направление не должно нарушаться. Получается ломаная линия.

• Ломаная замкнется. Она представляет разность Минковского $K - L$.

Давайте убедимся, что это определение хорошее, т.е. что для него выполнены обычные свойства вычитания.

Задача 2. Докажите, что

$$K - K = 0\,.$$

(Действительно, мы получим букет векторов, где каждый красный вектор продублирован равным ему синим. Согласно алгоритму, все векторы надо удалить, и останется пустой пучок векторов, которому соответствует точка.)

Задача 3. Докажите, что

$$K - L + L = K.$$

(Убедитесь, что в полученном пучке векторы, пришедшие из L и из $-L$, убьют друг друга.)

Пример 5. Разность двух квадратов, повернутых друг относительно друга на 45°, – восьмиконечная звезда (рис.6).

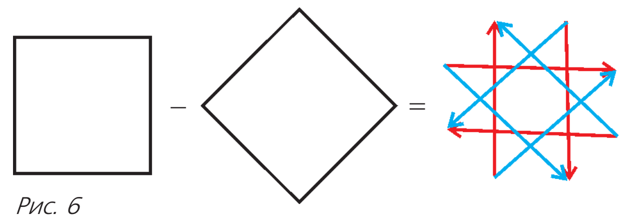


Рис. 6

Задача 4. На плоскости нарисована замкнутая ломаная, ребра которой – красные и синие стрелки. При этом две последовательные стрелки одного цвета склеены «конец к началу», а две последовательные стрелки разных цветов склеены «конец к концу» или «начало к началу». Как определить, представима ли такая ломаная как разность двух выпуклых многоугольников? Если да, то как найти эти многоугольники?

Задача 5 (для тех, кто знает, что такое «группа»).

(1) Подытожив сказанное, сделайте вывод о том, что разности многоугольников образуют группу относительно сложения по Минковскому.

(2) Сложение в группе задается как $(K - L) + (M - N) = (K + M) - (L + N)$. Однако давайте увидим геометрию происходящего. Пусть $K - L$ и $M - N$ заданы как ломаные из красно-синих стрелок. Как построить их сумму?

Выходим в пространство

Алиса начала было спускаться с холма, но вдруг оробела и остановилась.

– Прежде чем туда идти, нужно запастись хорошей веткой, чтобы отмахиваться от слонов, – оправдывалась она перед собой.

В трехмерном пространстве сумма Минковского определяется точно так же, как и на плоскости, но устроена сложнее. Уже неверно, что сумма составлена из перетасованных ребер (или граней) слагаемых. Убедитесь в этом на следующих несложных примерах.

Пример 6. Сумма трех взаимно ортогональных отрезков одинаковой длины – куб.

Пример 7. Сумма плоского пятиугольника и отрезка, не лежащего в плоскости пятиугольника, – пятиугольная призма.

Поэтому давайте сначала разработаем удобный вспомогательный инструмент, который сделает для нас сумму Минковского удобнее в обращении. Таким инструментом будут пружинные графы на сфере.

Обозначим через S единичную сферу в трехмерном пространстве с центром в начале координат O. *Большой окружностью* будем называть пересечение сферы S с плоскостью, проходящей через ее центр.

Рассмотрим некоторый граф G на сфере. Его надо представлять себе так: вершины графа $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ –