Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2139» или «Ф2145». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2139 – М2145 предлагались на заключительном этапе XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2139–М2145, Ф2145–Ф2152

М2139. Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета и таких, что произведение двух из них равно третьему?

Н.Агаханов

М2140. Восемь клеток одной диагонали шахматной доски назовем забором. Ладья ходит по доске, не наступая на одну и ту же клетку дважды и не наступая на клетки забора (промежуточные клетки не считаются посещенными). Какое наибольшее число прыжков через забор может совершить ладья?

Р.Женодаров

М2141. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

Л.Емельянов

М2142. Сколько раз функция

$$f(x) = \cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\ldots\cos\frac{x}{2009}$$

меняет знак на отрезке $\left[0; \frac{2009\pi}{2}\right]$?

Б.Трушин

М2143. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются *соседними*). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город.

Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

В.Дольников

М2144. По кругу стоят 100 наперстков. Под одним из них спрятана монетка. За один ход разрешается перевернуть четыре наперстка и проверить, лежит ли под одним из них монетка. После этого наперстки возвращают в исходное положение, а монетка перемещается под один из соседних с ней наперстков. За какое наименьшее число ходов наверняка удастся обнаружить монетку?

Б.Трушин

М2145. Даны натуральные числа x и y из отрезка $[2; 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ – составное.

С.Берлов, А.Белов

Ф2145. Суточный спутник Земли вращается по круговой орбите, лежащей в экваториальной плоскости. В результате кратковременного включения тормозного двигателя скорость спутника уменьшается по величине на 1 м/с, а направление скорости не меняется. Найдите изменение периода обращения спутника.

А.Повторов

Ф2146. По прямой бежит кролик, его скорость все время равна $v_0 = 5$ м/с. В точке, отстоящей на $L_0 = 100$ м от этой прямой, сидит лиса. Она замечает кролика и бросается в погоню, когда тот находится на минимальном расстоянии от упомянутой точки. Лиса бежит с такой же по величине скоростью, вектор скорости лисы направлен в любой момент в точку, где находится кролик. Найдите максимальное ускорение лисы в процессе погони. Лису и кролика считать материальными точками.

А.Старов

Ф2147. У Пети и Васи в кухне на даче имеется небольшой автоматический подогреватель воды. Он представляет собой пятилитровую емкость с хорошей теплоизоляцией и электрическим двухкиловаттным нагревателем. Емкость всегда соединена с водопроводной трубой, по которой в нее может поступать холодная вода, а внизу есть краник, через который можно отбирать горячую воду. Нагреватель снабжен реле с регулятором, позволяющим установить желаемую температуру воды. Подогреватель используется в основном для мытья посуды, а поскольку ночью посуду никто не моет, его на ночь отключают.

И тут у братьев зашел спор. Петя считал, что они поступают экономно, отключая электропитание прибора на ночь. Вася же полагал, что разницы никакой нет – ведь за ночь вода сильно остывает, и утром нагреватель включается на более длительное время, а если оставлять электропитание, то за ночь нагреватель будет включаться много раз, зато на небольшое время, поддерживая заданную температуру воды.

Чтобы решить спор, братья проделали эксперимент. Они установили регулятор температуры на 46 °С. Оказалось, что за 9 ночных часов вода остыла до 30 °С. Температура воздуха ночью в кухне была 16 °С. Достаточно ли этих данных, чтобы оценить, сколько придется платить в месяц, если отключать или не отключать питание подогревателя воды на ночь? Стоимость киловатт-часа принять равной 3 рублям.

И.Леенсон

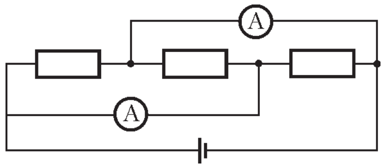
Ф2148. Давление насыщенных паров воды при +20 °С составляет 1000 Па, а при температуре +20,5 °С оно возрастает до 1020 Па. Определите по этим данным молярную теплоту испарения воды при +20 °С.

З.Рафаилов

Ф2149. Конденсаторы емкостями C = = 100 мкФ и $2C$ и резистор сопротивлением R_1 = 10 Ом соединены последовательно, а параллельно конденсатору емкостью C подключен резистор сопротивлением R_2 = 100 кОм. К выводам цепочки подключают батарейку напряжением U = 10 В. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R_1? А в резисторе сопротивлением R_2?

А.Зильберман

Ф2150. В схеме на рисунке резисторы (слева направо) имеют сопротивления 500 Ом, 200 Ом и 200 Ом, напряжение батарейки 6 В. Амперметры одинаковые: каждый имеет сопротивление 1 Ом, «класс точности» 1%, ток полного отклонения 50 мА. Найдите показания амперметров.



А.Простов

Ф2151. Три катушки, индуктивности которых 1 Гн, 2 Гн и 4 Гн, соединены «звездой». Общая точка заземлена куском провода, параллельно этому проводу включен конденсатор емкостью 10 мкФ. В некоторый момент свободные концы катушек подключают к батарейкам, создающим в точках подключения одинаковые потенциалы +6 В. Через время 0,1 с после подключения заземляющий провод перерезают. Найдите максимальный заряд конденсатора. Элементы цепи считать идеальными.

Р.Александров

Ф2152. Широкий параллельный пучок лучей падает на прозрачный однородный шар из материала с коэффициентом преломления n = 1,414. Найдите размер светлого пятна на противоположной стороне шара.

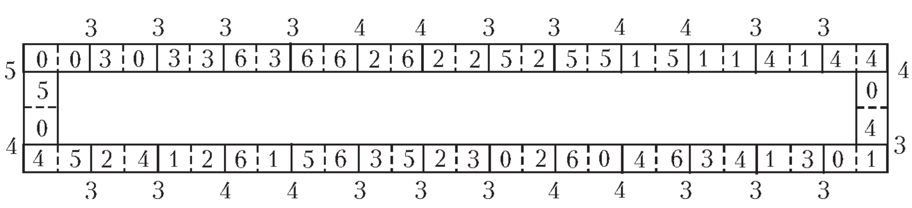
А.Шаров

Решения задач М2116 – М2123, Ф2130–Ф2137

М2116. *Полный набор домино выкладывается на столе в замкнутую цепь, и для всех пар соседних доминошек вычисляется модуль разности очков на клетках, которыми они соприкасаются. Обозначим через S сумму всех таких модулей разностей. Ясно, что наименьшее значение S равно 0 (это происходит в том случае, когда замкнутая цепь выложена по правилам домино). А какое наибольшее значение может принимать сумма S?*

Ответ: 96.

Пронумеруем доминошки по часовой стрелке числами от 1 до 28, начиная с некоторой из них. Пусть первая и вторая доминошки соприкасаются очками a_1 и b_1, вторая и третья – очками a_2 и b_2, …, двадцать восьмая и первая – a_{28} и b_{28}, причем $a_i \ge b_i$ для всех i от 1 до 28. Тогда в наборе чисел $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{28}, b_{28}$ каждое



из чисел от 0 до 6 содержится ровно 8 раз. Оценим указанную в условии сумму:

$$S = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_{28} - b_{28}) =$$
$$= (a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_{28} + b_{28}) - 2(b_1 + b_2 + \ldots + b_{28}) =$$
$$= 8 \cdot 21 - 2(b_1 + b_2 + \ldots + b_{28}) \le$$
$$\le 8 \cdot 21 - 2(8 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = 96.$$

Пример, когда данная сумма равна 96, приведен на рисунке. Этот пример интересен также тем, что при повороте всех доминошек на 180° (каждая доминошка поворачивается вокруг своего центра) получается замкнутая цепь, выложенная по правилам домино.

А.Грибалко

М2117. *Существует ли арифметическая прогрессия из 2008 различных натуральных чисел, произведение которых равно точной 2009-й степени натурального числа?*

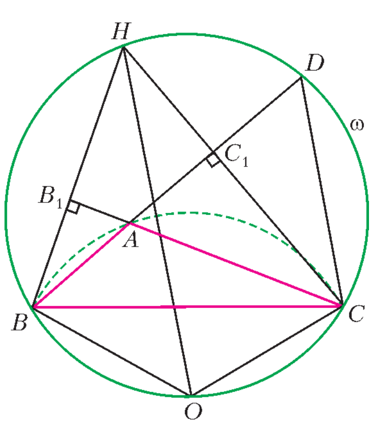
Ответ: существует.

Примером может служить арифметическая прогрессия $2008!, 2 \cdot 2008!, 3 \cdot 2008!, \ldots, 2008 \cdot 2008!$. Произведение этих 2008 чисел равно $(2008!)^{2009}$.

Утверждение задачи остается в силе, если вместо чисел 2008 и 2009 взять произвольные взаимно простые натуральные числа m и n. Для построения примера вначале рассмотрим любые m различных натуральных чисел, образующие арифметическую прогрессию. Пусть произведение этих чисел равно N. Домножим каждое из чисел на N^k. После домножения мы по-прежнему будем иметь набор из m чисел, образующих арифметическую прогрессию, а произведение этих чисел будет равно N^{mk+1}. Теперь ясно, что условие задачи будет выполнено, если $mk+1$ делится на n. Нетрудно видеть, что в случае взаимно простых m и n подходящее натуральное k найдется.

Г.Гальперин

М2118. *Докажите, что в треугольнике ABC с углом A, равным 120°, расстояние от центра описанной окружности до точки пересечения высот равно AB + AC.*



Пусть BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC, а O и H – центр его описанной окружности и точка пересечения высот соответственно (см. рисунок). В окружности, описанной вокруг треугольника ABC, величина дуги BAC равна 120°, поэтому центральный угол BOC равен 120°. Пусть ω – окружность, описанная около треугольника BOC. Из четырехугольника B_1AC_1H получаем, что

$$\angle BHC = \angle B_1HC_1 = 180° - \angle B_1AC_1 = 180° - 120° = 60°,$$

поэтому точка H лежит на окружности ω. На продолжении отрезка AB за точку A отложим отрезок $AD = AC$. Угол DAC равен 60°, поэтому треугольник DAC – правильный. Отсюда $\angle BDC = \angle ADC = 60°$, следовательно, точка D лежит на окружности ω. Кроме того, $AB + AC = AB + AD = BD$, значит, для решения задачи достаточно установить равенство хорд OH и BD в окружности ω. Заметим, что величины меньших дуг OB и HD равны по 60°, так как в силу $BO = OC$ угол BHO равен $\frac{1}{2}\angle BHC$, т.е. 30°, и $\angle HBD = 90° - \angle BHC_1 = 30°$. Значит, OH и BD равны как диагонали равнобокой трапеции $BHDO$.

П.Кожевников

М2119. *В бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности все числа положительны, причем каждое натуральное число встречается в ней бесконечно много раз.*

Пусть $b(t)$ равно 1, если наибольший нечетный делитель числа t имеет остаток 1 при делении на 4, и $b(t)$ равно −1 в противном случае. Тогда

$$a_n = b(1) + b(2) + \ldots + b(n).$$

Каждому натуральному числу t, для которого $b(t)$ равно 1, поставим в соответствие натуральное число t', для которого $b(t')$ равно −1, следующим образом: если $t = 2^x(4y+1)$ (где x и y – некоторые целые неотрицательные числа), положим $t' = 2^x(4y+3)$. Ясно, что $t' > t$, и по числу t' однозначно определяется число t, которому оно соответствует. Среди чисел 1, 2, …, n имеется несколько пар соответствующих чисел t, t', а также несколько чисел t вида $t = 2^x(4y+1)$, для которых соответствующее число t' больше n. Поэтому сумма $a_n = b(1) + b(2) + \ldots + b(n)$ равна количеству чисел $t = 2^x(4y+1)$, не превосходящих n, но таких, что $t' > n$, т.е. количеству решений двойного неравенства

$$2^x(4y+1) \le n < 2^x(4y+3) \qquad (1)$$

в целых неотрицательных x и y. (Из полученной интерпретации чисел a_n уже вытекает, что $a_n \ge 0$.)

Пусть $n = \overline{c_{r+1}c_rc_{r-1}\ldots c_1c_0}$ – двоичная запись числа n, дополненная слева цифрой 0 (для удобства дальнейших рассуждений), т.е. $n = c_r \cdot 2^r + c_{r-1} \cdot 2^{r-1} + \ldots + c_1 \cdot 2 + c_0$, где $c_{r+1} = 0$, $c_r = 1$, c_i равно 0 или 1 при $i = 0, 1, \ldots, r-1$. Ниже мы докажем, что количество a_n решений двойного неравенства (1) в целых неотрицательных x и y равно сумме $|c_{r+1} - c_r| + |c_r - c_{r-1}| + \ldots + |c_1 - c_0|$.

Другими словами, a_n – это количество пар соседних различных цифр в записи $\overline{c_{r+1}c_rc_{r-1}\ldots c_1c_0}$. Например, зная двоичную запись числа $2009 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = \overline{011111011001}$, легко находим $a_{2009} = 5$. Отсюда сразу последует решение задачи. Действительно, так как $c_{r+1} = 0$ и $c_r = 1$, то $a_n > 0$. Далее, зафиксировав натуральное s, заметим, что, при любом натуральном k, если двоичная запись числа n имеет вид 010…010…0…10…0 (0, затем s групп вида 10…0 из одной единицы и k нулей), то $a_n = 2s$, а если двоичная запись числа n имеет вид 010…010…0…10…01 (0, затем s групп вида 10…0 из одной единицы и k нулей, и еще одна единица в конце), то $a_n = 2s+1$. Таким образом, a_n равно фиксированному четному или нечетному числу для бесконечного количества значений n. Итак, будем искать количество решений в целых неотрицательных x и y неравенства (1).

Так как $n < 2^{r+1}$, то при $x \geq r+1$ неравенство (1) не имеет нужных нам решений. Зафиксируем x из множества $\{0, 1, 2, \ldots, r\}$. Имеем

$$\frac{n}{2^x} = \left(c_r \cdot 2^{r-x} + c_{r-1} \cdot 2^{r-x-1} + \ldots + c_{x+1} \cdot 2 + c_x\right) + \left(c_{x+1} \cdot 2^{-1} + \ldots + c_0 \cdot 2^{-x}\right) = 4A + 2c_{x+1} + c_x + \alpha,$$

где $A = c_r \cdot 2^{r-x-2} + c_{r-1} \cdot 2^{r-x-3} + \ldots + c_{x+2}$ (считаем, что $A = 0$ в случае $x = r$) и $0 \leq \alpha < 1$. Поделив неравенство (1) на 2^x, получаем

$$4y + 1 \leq 4A + 2c_{x+1} + c_x + \alpha < 4y + 3. \qquad (2)$$

Пусть для некоторого y неравенство (2) выполнено. Тогда при $y \leq A - 1$ имеем $4A + 2c_{x+1} + c_x + \alpha \leq 4A - 4 + 3$, что неверно, а при $y \geq A + 1$ имеем $4A + 2c_{x+1} + c_x + \alpha \geq 4A + 4 + 1$, что также неверно. Единственное возможное значение $y = A$ удовлетворяет (2) в том и только том случае, когда один из двоичных знаков c_x и c_{x+1} равен 1, а другой равен 0. Таким образом, каждая пара различных соседних цифр c_x, c_{x+1} дает ровно одно решение неравенства (1).

А.Заславский, П.Кожевников

М2120. *Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами таков, что уравнение $P(m) + P(n) = 0$ имеет бесконечно много решений в целых числах m и n. Докажите, что график функции $y = P(x)$ имеет центр симметрии.*

Можно считать, что степень многочлена $P(x)$ больше 1, а его старший коэффициент равен 1 (если старший коэффициент отличен от 1, то, поделив на него, получим многочлен, удовлетворяющий условию).

Заметим, что для данного числа n может найтись лишь конечное число таких чисел m, что $P(m) = -P(n)$ (поскольку многочлен может принимать одно и то же конкретное значение лишь в конечном числе точек, не превышающем его степень). Также будем использовать следующий факт, верный для любого многочлена $P(x)$ нечетной степени с положительным старшим коэффициентом (и аналогичный факт для многочлена четной степени): найдется такое число A, что $P(x) > 0$ при $x > A$, $P(x) < 0$ при $x < -A$, и, кроме того, $P(x)$ возрастает на каждом из интервалов $(-\infty; -A)$, $(A; +\infty)$. Если бы степень многочлена $P(x)$ была четной, то при достаточно больших по модулю x выполнялось бы неравенство $P(x) > 0$, и могло найтись лишь конечное число пар целых чисел m, n, для которых выполнено равенство $P(m) + P(n) = 0$. Значит, степень $P(x)$ нечетна. Учитывая сказанное, получаем, что для любого наперед заданного числа C найдется бесконечно много таких пар чисел $m > C$ и $n < -C$, что $P(m) + P(n) = 0$.

Пусть степень $P(x)$ равна k, и $P(x) = x^k + ax^{k-1} + \ldots$ (здесь и далее троеточием обозначены слагаемые меньших степеней). Легко подобрать такое число d, что многочлен $P(x-d)$ будет иметь вид $x^k + bx^{k-2} + \ldots$, т.е. коэффициент при степени $k-1$ будет нулевым. Действительно,

$$P(x-d) = (x-d)^k + a(x-d)^{k-1} + \ldots = x^k - kdx^{k-1} + ax^{k-1} + \ldots,$$

и достаточно взять $d = a/k$. Докажем, что точка $(d;0)$ и является центром симметрии графика $P(x)$. Обозначим $P(x-d)$ за $Q(x)$. Достаточно доказать, что график многочлена $Q(x)$ симметричен относительно точки $(0;0)$, т.е. что $Q(x) = -Q(-x)$ при любом x.

Итак, $Q(x) = x^k + bx^{k-2} + \ldots$. Возьмем числа $m > 0$ и $n < 0$ по модулю больше C (как выбрано C, будет ясно из дальнейших рассуждений), для которых $Q(m) + Q(n) = 0$ (где $m - d$ и $n - d$ – целые числа). Докажем, что $|m| = |n|$. Пусть $|m| < |n|$. Положим вначале $n = -m - 1$. Тогда

$$Q(m) + Q(n) = Q(m) + Q(-m-1) = m^k + bm^{k-2} + \ldots + (-m-1)^k + b(-m-1)^{k-2} + \ldots = -km^{k-1} + R(m),$$

где $R(x)$ – некий фиксированный многочлен степени $k-2$; таким образом, $Q(m) + Q(-m-1)$ – многочлен четной степени с отрицательным старшим коэффициентом. Тогда если C достаточно велико, то $Q(m) + Q(-m-1)$ будет меньше нуля. При $n = -m-2$, $-m-3$, $-m-4, \ldots$ сумма $Q(m) + Q(n)$ тем более будет меньше нуля, если C настолько велико, что $Q(x)$ возрастает на интервале $(-\infty; -C)$. Итак, не может быть $|m| < |n|$ при $m > C$, $n < -C$. Аналогично доказывается, что невозможно $|m| > |n|$. Значит, существует бесконечно много m (где $m - d$ – целое) таких, что $Q(m) + Q(-m) = 0$, поэтому многочлен $Q(x) + Q(-x)$ имеет бесконечно много корней. Это возможно, только если этот многочлен нулевой, т.е. выполнено тождество $Q(x) + Q(-x) \equiv 0$.

Замечания. Отметим, что график любого многочлена третьей степени имеет центр симметрии.

Можно сформулировать задачу, аналогичную данной задаче, для случая многочлена четной степени: *если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами таков, что уравнение $P(m) = P(m-n)$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах m и n, то график функции $y = P(x)$ имеет ось симметрии.*

Отметим также идейно родственную задачу, предлагавшуюся на окружном этапе Всероссийской олимпиады школьников в 1999 году (задача 8 для 11 класса, автор А.Голованов): *если для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках, то существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.*

С.Дориченко, П.Кожевников

М2121. *Противоположные стороны выпуклого шестиугольника ABCDEF параллельны. Назовем его «высотами» векторы с концами на прямых, содержащих противолежащие стороны, перпендикулярные им и направленные от AB к DE, от EF к BC и от CD к AF. Докажите, что вокруг этого шестиугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его «высот» равна нулевому вектору.*

Пусть из «высот» шестиугольника $ABCDEF$ можно составить треугольник (это и значит, что сумма «высот» равна нулевому вектору). Тогда этот треугольник равен треугольнику AA_1A_2, где A_1 и A_2 – проекции точки A на прямые CD и DE соответственно (рис. 1). Значит, четырехугольник AA_1DA_2 – вписанный, и диаметр описанной около треугольника AA_1A_2 окружности равен AD. Аналогично получаем, что две другие главные диагонали шестиугольника равны этому диаметру, т.е. $AD = BE = CF$. Следовательно, AB и DE являются основаниями равнобокой трапеции и поэтому имеют общий серединный перпендикуляр. Этот серединный перпендикуляр совпадает с биссектрисой угла между прямыми AD и BE, т.е. проходит через центр O окружности, вписанной в треугольник, образованный главными диагоналями. Серединные перпендикуляры к остальным сторонам шестиугольника также проходят через точку O, следовательно, вокруг шестиугольника $ABCDEF$ можно описать окружность.

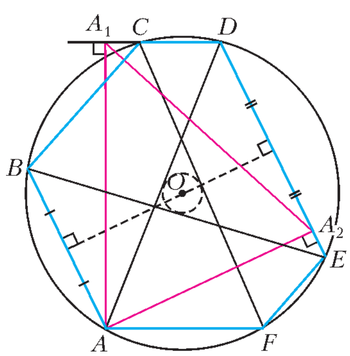


Рис. 1

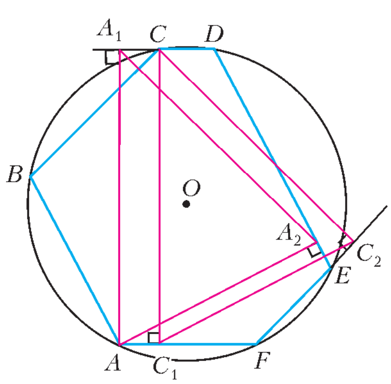


Рис. 2

Пусть теперь $ABCDEF$ – вписанный шестиугольник (рис. 2). Вновь рассматривая вписанный четырехугольник AA_1DA_2, получаем

$$\angle DA_1A_2 = \angle DAA_2 = 90° - \angle DAB = \angle BCD - 90°,$$

т.е. $A_1A_2 \perp BC$. Опустим перпендикуляры CC_1 и CC_2 на прямые AF и FE соответственно. Тогда, рассуждая аналогично, получим, что $C_1C_2 \perp DE$. Таким образом, у треугольников AA_1A_2 и C_1CC_2 соответствующие стороны параллельны друг другу и $AA_1 = CC_1$, следовательно, эти треугольники равны. Поэтому отрезок A_1A_2 равен третьей «высоте» шестиугольника.

Замечание. Как указал читатель О.Жеребцов из Усинска (Республика Коми), вывести из вписанности шестиугольника нужное векторное равенство можно и по-другому, с использованием векторов. Обозначив через A', B', C', D', E', F' середины сторон вписанного шестиугольника $ABCDEF$ соответственно, заметим, что $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{C'F'}$ и $\overrightarrow{E'B'}$ – «высоты» шестиугольника. Тогда нужное равенство $\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{C'F'} + \overrightarrow{E'B'} = \vec{0}$ вытекает из равенств

$$\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'E} + \overrightarrow{EE'} + \overrightarrow{E'B'} + \\ + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'F'} + \overrightarrow{F'A} + \overrightarrow{AA'} = \vec{0}$$

и

$$\overrightarrow{D'E} + \overrightarrow{EE'} + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{F'A} + \overrightarrow{AA'} = \\ = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}.$$

А.Заславский

М2122. *а) Докажите, что любое натуральное число n, большее 17, можно разложить в сумму трех натуральных попарно взаимно простых слагаемых, каждое из которых больше 1.*

б) Выясните, конечно или бесконечно множество натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех взаимно простых в совокупности натуральных слагаемых, любые два из которых не взаимно просты.*

а) Если n – четное число, большее 8, то $n = 6k$, $n = 6k + 2$ или $n = 6k + 4$, причем в первых двух случаях k есть натуральное число, большее 1, в третьем же случае k – натуральное число. Из формул $6k = 2 + 3 + [6(k-1)+1]$, $6k + 2 = 3 + 4 + [6(k-1)+1]$, $6k + 4 = 2 + 3 + (6k-1)$ легко вытекает, что n есть сумма трех натуральных чисел, больших 1 и попарно взаимно простых.

Пусть теперь n – нечетное число, большее 17. Здесь возможны шесть случаев: $n = 12k+1$, $12k+3$, $12k+5$, $12k+7$, $12k+9$ и $12k+11$, причем в первых трех случаях k есть натуральное число, большее 1, в трех же остальных k – натуральное число. Имеем $12k + 1 = [6(k-1)-1] + [6(k-1)+5] + 9$, где числа $6(k-1)-1$, $6(k-1)+5$ и 9 – большие единицы и попарно взаимные простые, так как первые два из них не делятся на 3 и являются взаимно простыми (ибо если $d \mid 6(k-1)-1$ и $d \mid 6(k-1)+5$, то $d \mid 6$, а оба числа нечетные).
Если $n = 12k+3$, то $n = (6k-1) + (6k+1) + 3$;
если $n = 12k+5$, то $n = (6k-5) + (6k+1) + 9$;
если $n = 12k+7$, то $n = (6k+5) + (6k-1) + 3$;
если $n = 12k+9$, то $n = (6k-1) + (6k+1) + 9$;
если $n = 12k+11$, то $n = (6(k+1)-5) + (6(k+1)+1) + 3$.

В каждом случае, как легко заметить, мы имеем три слагаемых, больших 1 и попарно взаимно простых.

Комментарии. Число 17 не обладает обсуждаемым свойством: если в условиях задачи $17 = a + b + c$, то a, b, c – различные нечетные числа, большие 1. Такие тройки с наименьшими суммами: (3, 5, 7) и (3, 5, 9) не подходят, а сумма чисел любой иной больше 17.

Постараемся теперь понять, почему границей оказалось именно число 17. Для этого решим вначале более простую, чем пункт а), задачу: докажем, что любое натуральное число, большее 6, является суммой двух взаимно простых натуральных чисел, больших 1. Эту задачу можно решить подобно пункту а) или с помощью функции Эйлера $\varphi(n)$ (условие задачи эквивалентно тому, что $\varphi(n) > 2$ при $n > 6$); мы покажем гораздо более прозрачное неэлементарное решение.

Пусть в интервале $\left(\frac{n}{2}; n\right)$ найдется простое p такое, что $n - p > 1$. Тогда разложение $n = p + (n - p)$ – искомое (числа p и $n - p$ взаимно просты, так как p – простое, а $(n-p) < p$).

Ясно, что при $6 < n < 12$ искомое p существует. При $n \ge 12$ его существование вытекает из такого утверждения (мы оставляем его без доказательства).

Предложение 1. Пусть $n > 11$. Тогда в интервале $\left(\frac{n}{2}; n\right)$ содержится по крайней мере два различных простых числа.

Перейдем теперь к исходному случаю трех слагаемых. Пусть в интервале $\left(\frac{n}{2}; n\right)$ найдется простое q такое, что

$$n - q > 6. \qquad (1)$$

Тогда разложим $m = n - q$ как выше: $m = p + (m - p)$. Как и раньше, разложение $n = q + p + (n - q - p)$ – искомое.

Докажем теперь, что при $n > 17$ условие (1) всегда выполняется.

Предложение 2. Пусть $n > 17$. Тогда в интервале $\left(\frac{n}{2}; n\right)$ содержится по крайней мере три различных простых числа: $\frac{n}{2} < q < r < s < n$.

Легко видеть, что при $q > 3$ простые числа $q < r < s$ не могут быть последовательными нечетными. Отсюда $n - q > 6$.

Предложения 1 и 2 – незначительные обобщения знаменитого постулата Бертрана. Их нетрудно доказать с помощью рассуждений статьи А.Коробова «Простые числа и постулат Бертрана» («Квант» № 4 за 1998 год; см. также: М.Айгнер и Г.Циглер. «Доказательства из Книги». – М.: Мир, 2006).

С помощью подобных рассуждений нетрудно доказать индукцией по n следующее

Предложение 3. Для любого $n > 1$ существует такое $N(n)$, что любое $k > N$ представимо в виде суммы n попарно взаимно простых слагаемых, больших 1.

б) Для краткости, назовем *трехпарным* число, допускающее представление в виде суммы трех взаимно простых натуральных слагаемых, любые два из которых не взаимно просты.

Пусть натуральное n обладает следующим свойством: существуют простые

$$p < r < q: \ p^2 rq < n, \ (prq, n) = 1. \qquad (2)$$

Тогда число n трехпарно.

Действительно, рассмотрим числа вида $n - xqr$. Поскольку p и qr взаимно просты и n не делится на p, найдется такое целое положительное $x < p$, что $n - xqr$ делится на p.

Пусть $n - xqr = mp$. В силу того что $n > p^2 qr$ и $x < p$, имеем $m > (p-1)qr$, причем m не делится на q и r.

Поскольку q и r взаимно просты, найдется такое целое положительное $y < r$, что $m - yq$ делится на r. Так как $r > p > x$ и r – простое, то r и x взаимно просты, а значит, остатки от деления на x чисел вида $y + kr$ при $k = 0, 1, \ldots, x - 1$ различны. Тогда среди этих остатков есть 1. Для такого k число $w = y + kr$ взаимно просто с x. Но поскольку $m - yq$ делится на r, то и $m - wq = m - yq - krq$ делится на r. При этом $m - yq - krq > (p - 1)qr - yq - kqr > (p - 1)qr - qr - (p - 2)qr = 0$, т.е. $m = wq + zr$, причем $w, z > 0$.

Окончательно имеем: $n = xqr + wpq + zpr$, причем эти три слагаемых взаимно просты, поскольку xqr и wpq имеют наибольший общий делитель q (все остальные множители в этих слагаемых взаимно просты по построению), а zpr не делится на q (иначе бы и n делилось на q). Таким образом, n трехпарно.

Докажем, что множество натуральных n, не обладающих свойством (2), конечно.

Назовем натуральное число n свободным от квадратов, если p^2 не делит n при любом простом p.

Лемма 1. При любом натуральном n среди чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ более четверти свободны от квадратов.

Доказательство. Среди чисел $1, 2, \ldots, n$ имеем не более $\frac{n}{p^2}$ чисел, делящихся на p^2. Поэтому количество чисел, делящихся на квадрат простого числа, не больше

$$\sum_{p \le \sqrt{n}} \frac{n}{p^2} < \frac{n}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n}{k(k+1)} = \frac{n}{4} + n\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{3n}{4}.$$

Лемма доказана.

Занумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1, p_2, \ldots$

Лемма 2. $p_k < 2^{k+1}$ при любом k.

Доказательство. Первые (по возрастанию) $k - 1$ простых чисел порождают 2^{k-1} чисел, свободных от квадратов. Поэтому среди чисел от 1 до $4 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$ содержится по меньшей мере k простых чисел (в противном случае доля чисел, свободных от квадратов, была бы не более четверти), т.е. $p_k \le 2^{k+1}$.

Лемма 3. Для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > 2^{256}$, существуют простые $p < q < r < \sqrt[4]{n}$, не являющиеся делителями числа n (такие числа далее называем *неделителями* числа n).

Доказательство. Пусть $2^{k+1} \le \sqrt[4]{n} \le 2^{k+2}$, и предположим, что среди $p_1, \ldots, p_k$ не более двух неделителей n.

Тогда поскольку $2 \le p_1 < p_2 < \ldots < p_{11}$, $2^5 < p_{12} < < p_{13} < \ldots < p_{k-2}$, то $n \ge p_1 \ldots p_{k-2} > 2^{11} \cdot 2^{5(k-13)} > > 2^{4k+8} \ge n$ при $k > 62$. Следовательно, $k \le 62$, $n \le 2^{256}$. Противоречие показывает, что три неделителя существуют. С другой стороны, из леммы 2 следует, что $p_k < \sqrt[4]{n}$. Лемма 3 доказана.

Таким образом, любое натуральное $n > 2^{256}$ обладает свойством (2). Утверждение задачи доказано.

Замечание 1. Можно доказать и более общее утверждение: при любом $k \ge 2$ множество натуральных чисел, не допускающих представления в виде суммы $k + + 1$ взаимно простых слагаемых, любые k из которых не взаимно просты, будет конечным.

Замечание 2. Грубая оценка 2^{256} позволяет легко найти наибольшее не обладающее свойством (2) число: 120120. Покажем, как это можно сделать.

Оценку можно последовательно понижать. Так, из $n \le 2^{256}$ сразу получается, что $n < 2^{48}$.

В самом деле, пусть $n \ge 2^{48}$, $\sqrt[4]{n} \ge 2^{12}$. Рассуждая как при доказательстве леммы 3, получаем

$$n \ge 4079 \cdot \ldots \cdot 1031 > \left(2^{10}\right)^{30} > 2^{256}.$$

Таким образом, последовательно получаются оценки: 2^{24}, 2^{20}, 2^{18}, 130000. Теперь достаточно показать, что не обладающее свойством (2) число n интервала (120120; 130000) должно делиться на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$. Рассмотрим простые числа 2, 3, …, 23. Пусть среди них есть три неделителя $p < r < s$ числа n, один из которых не больше 13. Имеем $p^2 rs \le 13^2 \cdot 19 \cdot 23 < 120120 < n$, откуда n обладает свойством (2).

Значит, среди простых чисел от 2 до 23 не более двух неделителей n, причем один из них не больше 13. Окончательно: $n \ge 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 > 130000$.

Однако число 120120 является трехпарным: 120120 = = 391 + 5695 + 114034, где (391, 5695) = 17, (5695, 114034) = 67, (114034, 391) = 23. Наибольшее не являющееся трехпарным число – 2730.

В.Лецко, В.Сендеров

М2123. *Тест состоит из 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя действовать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)?*

Пусть на каждый из вопросов возможны два ответа: «да» или «нет».

Разобьем вопросы теста на группы по 5 вопросов (с 1-го по 5-й, с 6-го по 10-й и т.д.) При первой попытке ответим «нет» на все вопросы.

Покажем теперь, как за 4 следующие попытки узнать все верные ответы на вопросы в первой группе. На вопросы с 6-го по 30-й отвечаем в этих попытках «нет», а на вопросы с 1-го по 5-й отвечаем так:

при второй попытке отвечаем «да» на все пять вопросов;

при третьей попытке отвечаем «нет» на 1-й и 2-й вопросы (на остальные три – «да»);

при четвертой попытке отвечаем «нет» на 1-й и 3-й вопросы (на остальные три – «да»);

при пятой попытке отвечаем «нет» на 1-й и 4-й вопросы (на остальные три – «да»).

Заметим, что из сообщений о числе верных ответов в первой и второй попытках мы узнаем, например, сколько во второй попытке было верных ответов на вопросы с 1-го по 5-й.

После третьей попытки мы узнаем количество A верных ответов во второй попытке среди двух ответов на 1-й и 2-й вопросы, после четвертой – количество B верных ответов во второй попытке среди двух ответов на 1-й и 3-й вопросы, после пятой – количество C верных ответов во второй попытке среди двух ответов на 1-й и 4-й вопросы.

Пусть хотя бы одно из чисел A, B, C равно 0 или 2. Тогда после пятой попытки мы узнаем верные ответы на вопросы с 1-го по 4-й. В самом деле, пусть, например, $B = 2$; тогда во второй попытке ответы на 1-й и 3-й вопросы верные; поэтому, зная A и C, определяем верные ответы на 2-й и 4-й вопросы соответственно. Зная верные ответы на вопросы с 1-го по 4-й, определим верный ответ на 5-й вопрос, так как знаем, сколько было верных ответов во второй попытке на вопросы с 1-го по 5-й.

Остается случай $A = B = C = 1$; тогда во второй попытке: среди ответов на 1-й и 2-й вопросы ровно один верный, среди ответов на 1-й и 3-й вопросы – тоже ровно один верный, и среди ответов на 1-й и 4-й вопросы – ровно один верный. Значит, при второй попытке на 2-й, 3-й и 4-й вопросы наши ответы либо все верны, либо все неверны. Но мы уже знаем, каких ответов при второй попытке на вопросы с 1-го по 5-й больше: верных или неверных. Таким образом, мы знаем верные ответы на на 2-й, 3-й и 4-й вопросы, тогда и на 1-й вопрос (верный ответ противоположен верному ответу на 2-й вопрос), а значит, и на 5-й вопрос.

Далее, аналогично узнаем верные ответы на вопросы 2-й, 3-й, 4-й и 5-й групп по 5 вопросов (потратив на каждую 4 попытки). Тогда за $1 + 4 \cdot 5 = 21$ попытку знаем верные ответы на вопросы с 1-го по 25-й. Заметим, что верные ответы на вопросы последней группы можно узнать за 3 попытки, поскольку мы уже знаем, сколько верных ответов в самой первой попытке мы сделали на эти вопросы. Итак, всего хватит 24 вопроса.

Замечание. Данную задачу можно переформулировать на языке линейной алгебры и получить значительно более сильные оценки на количество попыток. Скажем, для теста из 33 вопросов достаточно всего 16 попыток, чтобы узнать верные ответы на все вопросы.

С.Дориченко

Ф2130. *Удав решил установить мировой рекорд в прыжках в высоту среди удавов. Удав может из положения «свернувшись лежа» выпрямиться почти* *вертикально и разогнаться до скорости v. Длина удава L. Каким может быть рекорд? Как должен двигаться удав, чтобы установить рекорд? Масса удава распределена по его длине равномерно.*

Пусть H – высота планки над уровнем земли, M – масса удава. Будем отсчитывать потенциальную энергию также от уровня земли. Тогда начальная механическая энергия удава сразу после его выпрямления равна $Mg\frac{L}{2}+\frac{Mv^2}{2}$. Чтобы ее хватило для преодоления планки как можно большей высоты, удав должен двигаться так, чтобы его центр масс в момент преодоления планки находился как можно ниже. Для этого удаву нужно сложиться пополам, чтобы его середина оказалась над планкой, а голова и хвост свешивались вниз. При этом центр масс удава поднимется на максимальную высоту, равную $H - L/4$, и в этот момент кинетическая энергия удава будет равна нулю. Таким образом, на максимальной высоте механическая энергия удава будет $Mg\left(H-\frac{L}{4}\right)$. Из закона сохранения механической энергии получаем

$$Mg\frac{L}{2}+\frac{Mv^2}{2} \ge Mg\left(H-\frac{L}{4}\right).$$

Отсюда находим рекордную высоту:

$$H_{\max}=\frac{3L}{4}+\frac{v^2}{2g}.$$

С.Варламов

Ф2131. *Горизонтальная платформа, на которую положили без начальной скорости груз массой m, совершает f раз в секунду такие колебания: сначала она движется вправо с постоянным ускорением a, потом мгновенно останавливается и возвращается в начальное положение с постоянным ускорением a/2. Коэффициент трения между грузом и платформой $\mu < 1$, ускорение $a \gg g$, частота $f \gg 1$ Гц. В каком направлении и по какому закону будет двигаться груз, и будет ли он вообще двигаться? Считать, что скорость движения груза всегда много меньше максимальной скорости движения платформы.*

Поскольку $a \gg g$ и $\mu < 1$, груз будет все время скользить относительно платформы. При этом на него будет все время действовать сила трения скольжения $F = \mu mg$, постоянная по величине, но направленная то вправо, то влево.

Сравним время движения платформы вправо t_1 и время движения влево t_2. Поскольку движение платформы в обоих случаях равноускоренное и пройденные вправо и влево пути равны, получаем

$$\frac{at_1^2}{2}=\frac{a}{2}\frac{t_2^2}{2}, \text{ откуда } t_2=\sqrt{2}t_1.$$

Таким образом, влево платформа движется дольше, чем вправо. Значит, на груз будет дольше действовать сила трения, направленная влево, и он станет смещаться влево. Так как

$$t_1+t_2=\frac{1}{f} \text{ и } t_2=\sqrt{2}t_1,$$

получаем

$$t_1=\frac{1}{f\left(1+\sqrt{2}\right)},\ t_2=\frac{\sqrt{2}}{f\left(1+\sqrt{2}\right)}.$$

Изменение импульса груза за время $\Delta t = 1$ с составляет

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t}=m\frac{\Delta v}{\Delta t}=mb=f\left(\mu mgt_1-\mu mgt_2\right)=\mu mg\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}},$$

где $b=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ – среднее ускорение груза (за положительное направление принято направление движения груза вправо). Следовательно, груз будет двигаться влево со средним ускорением, равным по модулю

$$b=\mu g\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

А.Андрианов

Ф2132. *Один из концов U-образной трубки постоянного сечения с налитой в нее ртутью наглухо закрыли. Воздух в закрытом конце трубки стали медленно нагревать, измеряя зависимость его давления p от температуры T. Как оказалось, эта зависимость в начале нагревания приближенно является линейной: $p=p_0\left(1+\alpha\left(T/T_0-1\right)\right)$, где p_0 = 760 мм рт. ст. – атмосферное давление, T_0 – температура окружающей среды, коэффициент α = 0,5. Найдите высоту столба воздуха в закрытом конце трубки в начале процесса.*

Запишем уравнение состояния воздуха в закрытом конце трубки в начале процесса:

$$p_0Sl_0=\nu RT_0,$$

где S – площадь сечения трубки, l_0 – искомая высота воздушного столба, ν – число молей воздуха. Пусть при нагревании до температуры T уровень ртути в открытом конце трубки поднялся на x, а в закрытом опустился на x. Тогда давление воздуха в закрытом конце трубки равно $p=p_0+2\rho gx$, объем равен $S\left(l_0+x\right)$, и уравнение состояния воздуха имеет вид

$$\nu RT=\left(p_0+2\rho gx\right)S\left(l_0+x\right)=$$
$$=p_0Sl_0+Sx\left(p_0+2\rho gl_0\right)+2\rho gSx^2.$$

При малых x, в начале процесса нагревания, квадратичным слагаемым можно пренебречь, поэтому, вычитая из данного уравнения состояния то уравнение, которое было справедливо в начале процесса, получаем

$$\nu R\left(T-T_0\right)=Sx\left(p_0+2\rho gl_0\right),$$

откуда

$$x=\frac{\nu R\left(T-T_0\right)}{S\left(p_0+2\rho gl_0\right)}=\frac{p_0l_0}{p_0+2\rho gl_0}\frac{T-T_0}{T_0}.$$

Следовательно,

$$p=p_0+2\rho gx=p_0+\frac{p_0\cdot 2\rho gl_0}{p_0+2\rho gl_0}\frac{T-T_0}{T_0}=$$
$$=p_0\left(1+\frac{2\rho gl_0}{p_0+2\rho gl_0}\frac{T-T_0}{T_0}\right),$$

и

$$\alpha = \frac{2\rho g l_0}{p_0 + 2\rho g l_0}.$$

Отсюда находим

$$l_0 = \frac{p_0}{2\rho g\left(\alpha^{-1}-1\right)} = \frac{\rho g h_0}{2\rho g\left(\alpha^{-1}-1\right)} = \frac{h_0}{2\left(\alpha^{-1}-1\right)} = 380 \text{ мм},$$

где $h_0 = \frac{p_0}{\rho g} = 760$ мм – высота столба ртути, соответствующая данному в условии задачи значению атмосферного давления.

О.Шведов

Ф2133. *Проводящие концентрические сферы имеют радиусы R и 3R, на расстоянии 2R от их общего центра находится точечный заряд Q. Сферы соединяют между собой тонким проводом, и получившийся проводник заземляют тонким проводником, имеющим большое сопротивление. Какой заряд протечет по этому проводнику? Какое количество теплоты выделится в системе за большое время?*

Найдем разность потенциалов между сферами в тот момент, когда с малой сферы на большую перетек заряд q. Потенциал внутренней сферы равен потенциалу центра:

$$\varphi_{\text{внутр}} = k\frac{-q}{R} + k\frac{Q}{2R} + k\frac{q}{3R}.$$

Снаружи поле такое же, как если бы весь заряд $-q + +q + Q = Q$ был расположен в центре, поэтому потенциал внешней сферы равен

$$\varphi_{\text{внеш}} = k\frac{Q}{3R}.$$

Тогда разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{внутр}} - \varphi_{\text{внеш}} = \frac{1}{6}k\frac{Q}{R} - \frac{2}{3}k\frac{q}{R}.$$

Она меняется при перетекании заряда q по линейному закону $\Delta\varphi(q) = \frac{1}{6}k\frac{Q-4q}{R}$ от $\frac{1}{6}k\frac{Q}{R}$ до 0, а среднее значение составляет $\frac{1}{2}\Delta\varphi_{\text{нач}} = \frac{1}{12}k\frac{Q}{R}$. Полный протекший заряд равен

$$q_{\text{пр}} = \frac{Q}{4}.$$

При этом в соединяющем сферы проводе выделяется количество теплоты

$$W_1 = \frac{1}{12}k\frac{Q}{R}\cdot\frac{Q}{4} = \frac{1}{48}k\frac{Q^2}{R}.$$

Теперь заземляем проводник. Пусть на землю к некоторому моменту перетек заряд Q_1. Обозначим заряды внутренней и внешней сфер q_1 и q_2 соответственно. Тогда

$$q_1 + q_2 = -Q_1 \text{ и } k\frac{q_1}{R} + k\frac{q_2}{3R} + k\frac{Q}{2R} = k\frac{Q+q_1+q_2}{3R}.$$

Отсюда находим

$$q_1 = -\frac{Q}{4} \text{ и } q_2 = -Q_1 + \frac{Q}{4}$$

– заряд внутренней сферы остается неизменным и ток по «внутреннему» соединяющему проводу не течет. Это означает, что все тепло выделяется в заземляющем проводнике. По нему стекает полный заряд $Q_{1\,\text{полн}} = Q$, потенциал большой сферы меняется при этом от $k\frac{Q}{3R}$ до 0, среднее значение составляет $\frac{1}{6}k\frac{Q}{R}$, поэтому в заземляющем проводнике выделяется количество теплоты

$$W_2 = \frac{1}{6}k\frac{Q^2}{R}.$$

Всего в системе выделится количество теплоты

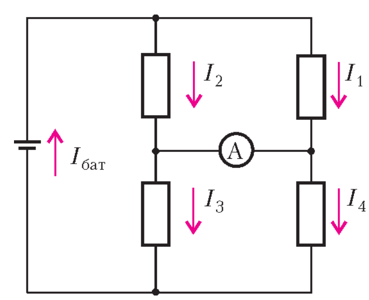
$$W_1 + W_2 = \frac{9}{48}k\frac{Q^2}{R}.$$

А.Теплов

Ф2134. *Обычный «мостик» собран из трех резисторов сопротивлением 100 Ом каждый и одного резистора сопротивлением 20 Ом. В одну из диагоналей мостика включен амперметр, он показывает 0,1 А. Какой ток течет через батарейку, подключенную к другой диагонали мостика? Амперметр считать идеальным.*

Обозначим ток через резистор сопротивлением 20 Ом через I_1 (см. рисунок), тогда через параллельный ему резистор сопротивлением 100 Ом течет ток $I_2 = \frac{I_1}{5}$, а сумма этих токов течет через батарейку:

$$I_{\text{бат}} = I_1 + I_2 = \frac{6}{5}I_1.$$



Токи в оставшихся двух резисторах одинаковы и равны

$$I_3 = I_4 = \frac{3}{5}I_1.$$

Через амперметр течет ток

$$I_{\text{A}} = I_1 - I_4 = \frac{2}{5}I_1 = \frac{1}{3}I_{\text{бат}}.$$

Таким образом, ток через батарею в 3 раза больше тока амперметра, т.е.

$$I_{\text{бат}} = 3I_{\text{A}} = 3\cdot 0{,}1\text{ А} = 0{,}3\text{ А}.$$

О.Простов

Ф2135. *Конденсатор емкостью C = 100 мкФ соединен последовательно с катушкой индуктивностью L = = 1 Гн. К выводам получившейся цепи подключают батарейку напряжением U_0 = 1 В, и ток в цепи начинает увеличиваться. В тот момент, когда ток максимален, параллельно катушке подключают резистор сопротивлением R = 10 кОм. Какой заряд* *протечет через резистор и сколько тепла в нем выделится за большой интервал времени? Элементы цепи считать идеальными.*

Сначала найдем максимальный ток через катушку – он соответствует моменту нулевой ЭДС индукции в катушке и напряжению конденсатора U_0. Работа батареи к этому моменту будет равна

$$A_{\text{бат}} = U_0 \cdot CU_0 = CU_0^2 .$$

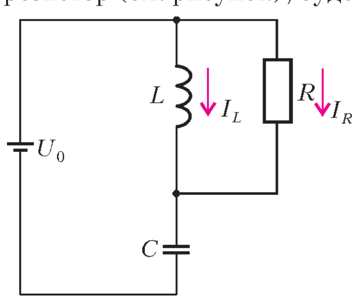
Тогда баланс энергий будет иметь вид

$$CU_0^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 + \frac{1}{2}LI_{\max}^2 ,$$

откуда

$$I_{\max} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}} .$$

Начиная с этого момента, когда параллельно катушке подключают резистор (см. рисунок), будет выполняться равенство



$$-L\frac{\Delta I_L}{\Delta t} = RI_R \text{, или } \Delta Q_R = -\frac{L}{R}\Delta I_L .$$

Суммируя, получим протекший по резистору заряд:

$$Q_R = \frac{LI_{\max}}{R} = U_0\frac{\sqrt{LC}}{R} = 1 \text{ мкКл} .$$

Количество теплоты, выделяющееся в резисторе, проще всего найти из баланса энергий: через большое время ток через катушку станет нулевым, а напряжение конденсатора будет равно U_0. Тогда

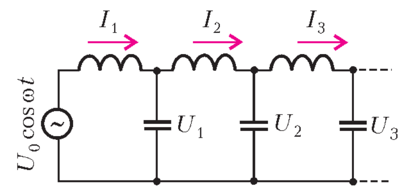
$$A_{\text{бат}} = W_{\text{тепл}} + \frac{1}{2}CU_0^2 \text{, и}$$

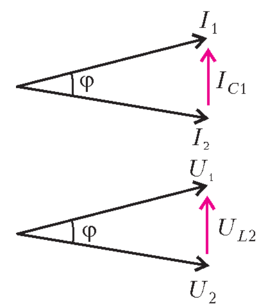
$$W_{\text{тепл}} = CU_0^2 - \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 = 50 \text{ мкДж} .$$

А.Повторов

Ф2136. *Для передачи не очень высокоскоростной информации используется витая пара, состоящая из двух тонких изолированных проводов большой длины. Индуктивность проводов в расчете на 1 сантиметр длины пары равна 1 мкГн, емкость между проводами составляет 1 пФ на сантиметр. С какой скоростью бежит электромагнитная волна вдоль такой пары?*

Нарисуем витую пару в виде эквивалентной бесконечной (или очень длинной) цепи, состоящей из одинаковых LC-звеньев (см. рисунок). Пусть каждое звено соответствует кусочку длиной $\Delta l = 1\text{см}$, потом мы проверим – правильно ли мы «разрезали» провода, не слишком ли велик выбранный нами кусочек. Токи





I_1, I_2, … отличаются друг от друга только сдвигами по фазе φ, а величины их одинаковы: $I_1 = I_2 = \ldots = I_L$. При малом φ

$$I_C = I_L \cdot \varphi .$$

Для частоты ω можно записать

$$U_L = \omega L \cdot I_L, \; U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I_C .$$

Тогда

$$\varphi = \omega\sqrt{LC} ,$$

и напряжение на выходе звена с номером n запишется так:

$$U_n = U_0\cos(\omega t - n\varphi) = U_0\cos\omega\left(t - n\sqrt{LC}\right) ,$$

т.е. оно запаздывает на время $\tau = n\sqrt{LC}$.

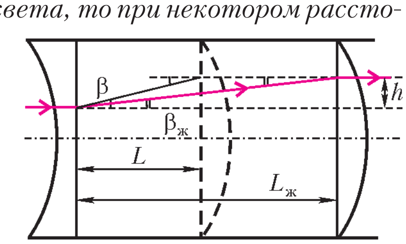
По этому запаздыванию мы и определим скорость электромагнитной волны:

$$v = \frac{\Delta l}{\tau} = \frac{1\cdot 10^{-2} \text{ м}}{1\cdot\sqrt{10^{-6}\cdot 1\cdot 10^{-12}} \text{ с}} = 1\cdot 10^7 \text{ м/с} .$$

Теперь – проверка. Сдвиг по фазе для одного звена для «умеренной» частоты $\omega = 1\cdot 10^6$ рад/с составит $\varphi = 10^{-3}$ рад $\ll 1$. Если «размеры» звена уменьшить еще – скорость волны будет той же.

З.Рафаилов

Ф2137. *Тонкая плосковогнутая рассеивающая линза прижата плоскостью к торцу цилиндрической трубки. В трубку вставлена плосковыпуклая собирающая линза так, что главные оптические оси линз совпадают с осью трубки, а собирающая линза обращена к рассеивающей плоской стороной. Собирающую линзу можно перемещать вдоль оси трубки. Если на первую (рассеивающую) линзу вдоль оси направить узкий параллельный пучок света, то при некотором расстоянии между линзами из системы выйдет также параллельный пучок. Если же пространство между линзами заполнить жидкостью, то для*



получения на выходе параллельного пучка расстояние между линзами необходимо увеличить в 1,5 раза. Найдите показатель преломления жидкости.

Рассмотрим ход одного из параксиальных (т.е. приосевых) лучей в данной оптической системе (см. рисунок). Пока между линзами в трубке был воздух, при преломлении этого луча на плоской поверхности плосковогнутой линзы выполнялось следующее соотношение, справедливое для малых углов падения α (на рисунке этот угол не показан – он практически равен нулю) и преломления β:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{n_{\text{ст}}},$$

где $n_{\text{ст}}$ – показатель преломления стекла этой линзы. После заполнения трубки жидкостью угол преломления изменился, так что теперь

$$\frac{\alpha}{\beta_{\text{ж}}} = \frac{n_{\text{ж}}}{n_{\text{ст}}}, \text{ откуда } n_{\text{ж}} = \frac{\beta}{\beta_{\text{ж}}}.$$

Угол падения луча на плоскую поверхность плосковыпуклой линзы после заполнения трубки жидкостью также уменьшился от β до $\beta_{\text{ж}}$. Для того чтобы данный луч после преломления в этой линзе остался параллельным главной оптической оси системы, он должен внутри линзы идти под тем же углом к ее выпуклой поверхности, что и до заполнения трубки жидкостью. Это возможно, только если луч попал на линзу на том же расстоянии от оси, что и до заполнения трубки жидкостью. Поскольку $n_{\text{ж}} > 1$ и $\beta_{\text{ж}} < \beta$, для выполнения указанного условия плосковыпуклую линзу надо отодвигать от плосковогнутой на $L_{\text{ж}} - L$, причем по условию $L_{\text{ж}}/L = 1,5$. Пусть h – то расстояние, на которое луч смещается, проходя между линзами, от оси системы. Тогда

$$\beta = \frac{h}{L}, \text{ а } \beta_{\text{ж}} = \frac{h}{L_{\text{ж}}}.$$

Таким образом,

$$n_{\text{ж}} = \frac{\beta}{\beta_{\text{ж}}} = \frac{L_{\text{ж}}}{L} = 1,5.$$

В.Погожев

НАМ ПИШУТ

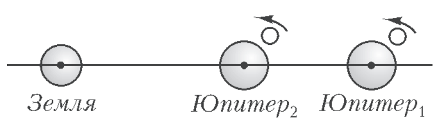
Наблюдения Рёмера и эффект Доплера

В 1675 году датский астроном Оле Рёмер, проводя серию наблюдений над затмениями спутников Юпитера, обнаружил, что период обращения одного из спутников периодически изменяется. Анализируя причины этого загадочного явления, ученый пришел к выводу, что оно непосредственно связано с тем, что свет движется от Юпитера до Земли с некоторой определенной скоростью, а не мгновенно, – факт в то время далеко не очевидный. Он даже сумел определить эту скорость, исходя из результатов своих наблюдений. Вычисленная им скорость оказалась равной 215000 км/с.

Нам представляется, что кажущееся изменение частоты обращения спутника вокруг планеты, которое наблюдал Рёмер, является своеобразным аналогом эффекта Доплера – изменения воспринимаемой частоты волны (световой или акустической) в зависимости от скорости приближения или удаления источника волны от приемника. Ведь оба явления – и вращение спутника вокруг планеты, и формирование волны – представляют собой периодические процессы. Не исключено, что сравнение этих явлений может помочь лучше разобраться в них обоих. Эффект Доплера подробно описан во многих книгах и учебниках, а недавно ему была посвящена обстоятельная статья в «Кванте» (см. статью С.Дворянинова «Легенда об искажении сигнала» в «Кванте» №1 за этот год). Поэтому, чтобы не повторяться, мы будем считать этот эффект известным читателю и рассказывать о нем не будем.

О.Рёмер наблюдал движение одного из спутников Юпитера (Ио), который периодически исчезал из поля зрения, скрываясь за планетой. Когда этот спутник выходил из тени, наблюдалась своеобразная вспышка света. Промежуток времени между вспышками Рёмер первоначально считал периодом обращения спутника вокруг планеты. Но потом он обратил внимание на то, что этот промежуток времени увеличивается, когда Земля и Юпитер удаляются друг от друга, и уменьшается, когда эти планеты сближаются. Такая связь между взаимным расположением Земли и Юпитера и периодом обращения его спутника казалась непостижимой. Но Рёмер разъяснил это удивительное явление, полагая, что свет перемещается не мгновенно, а с какой-то определенной скоростью. Действительно, во время сближения планет свет от второй из двух последовательных вспышек проходит меньшее расстояние до встречи с Землей, чем от первой, и для земного наблюдателя промежуток времени между вспышками уменьшается. А когда планеты удаляются друг от друга, этот промежуток времени увеличивается. В результате соответственно увеличивается или уменьшается наблюдаемая частота вспышек.

Поясним наши рассуждения с помощью рисунка. Для простоты будем полагать, что планеты движутся навстречу друг другу или удаляются друг от друга вдоль одной прямой. Пусть в некоторый момент времени T спутник выходит из тени Юпитера, находящегося на расстоянии $ЗЮ_1$ от Земли. Наблюдатель на Земле увидит его в момент времени $T + t_1$, где t_1 – время, за которое свет проходит расстояние $ЗЮ_1$. В момент времени $T + \tau$, где τ – период обращения спутника вокруг Юпитера, спутник вновь выйдет из тени Юпитера, приближающегося к Земле и находящегося теперь на расстоянии $ЗЮ_2$ от Земли. Наблюдатель с Земли увидит спутник в момент времени $T + \tau + t_2$, где t_2 – время, за которое свет проходит расстояние $ЗЮ_2$. Так как $t_2 < t_1$, то $T + \tau + t_2$ отличается от $T + t_1$ меньше чем на τ. Следовательно, для наблюдателя с Земли время между двумя выходами спутника Юпитера из тени будет меньше τ. А когда планеты удаляются друг от друга, для земного наблюдателя время между двумя выходами спутника Юпитера из тени будет больше τ. Полная аналогия с эффектом Доплера!



И.Гольдфаин