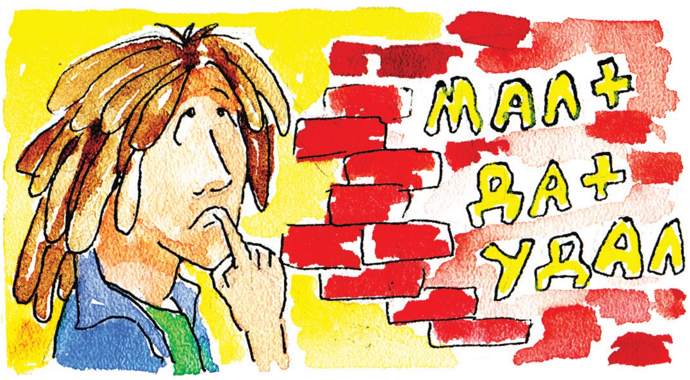
Задачи

1. Решите ребус

ДЕЦЛ = МАЛ + ДА + УДАЛ,

если ДЕЦЛ должен быть как можно меньше. (Разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми – одинаковые.)

М.Ахмеджанова



2. Барон Мюнхгаузен говорит, что у него есть многозначное число-палиндром (оно читается одинаково слева направо и справа налево). Написав его на бумажной ленте, барон сделал несколько разрезов между цифрами и получил на кусочках ленты числа 1, 2, ..., N (каждое – ровно по одному разу). Не хвастает ли барон?

А.Шаповалов

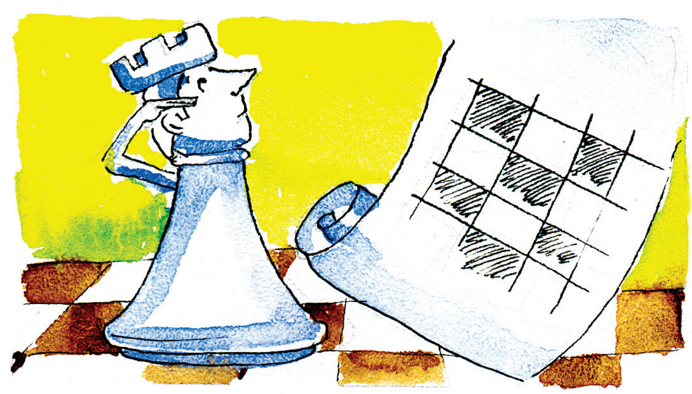
3. До повышения цен чай с двумя пряниками стоил 1 рубль. Когда все цены выросли (на одинаковое число процентов), рубля стало хватать только на чай с одним пряником. Потом цены опять выросли, причем на столько же процентов, как и в первый раз. Хватало ли после этого рубля хотя бы на чай?

И.Акулич

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

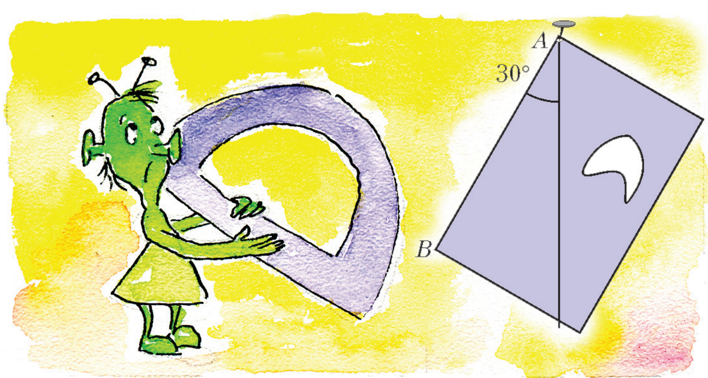
4. В углах шахматной доски стоят четыре ладьи. Ладья каждым своим ходом перемещается (по горизонтали или вертикали) до упора в другую ладью или в край доски. Соберите все ладьи в четырех центральных клетках.

А.Шаповалов



5. Если прямоугольник с вырезанным в нем отверстием неправильной формы подвесить за вершину A, сторона AB образует с вертикалью угол 30°, а если за вершину B – угол 60°. Какой угол с вертикалью образует сторона AB, если прямоугольник подвесить за середину этой стороны?

Е.Соколов



Иллюстрации Д.Гришуковой

Под данным углом

Вокруг любого прямоугольника можно описать окружность (рис. 1). Ее центр совпадает с центром прямоугольника, а диаметр равен его диагонали. Зафиксировав одну из диагоналей, приходим к одной из самых простых и красивых теорем геометрии: длина медианы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, равна половине длины гипотенузы (рис. 2).

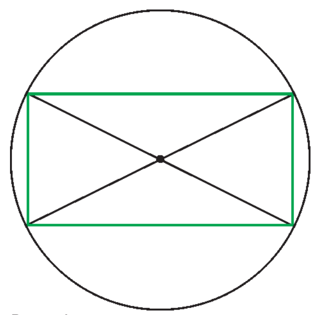


Рис. 1

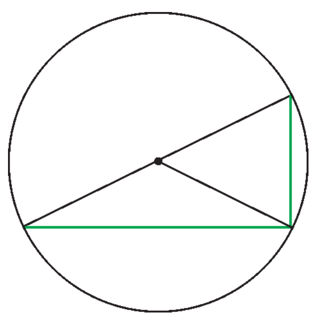


Рис. 2

Другими словами, данный отрезок виден под прямым углом из точек окружности, построенной на нем, как на диаметре (рис. 3).

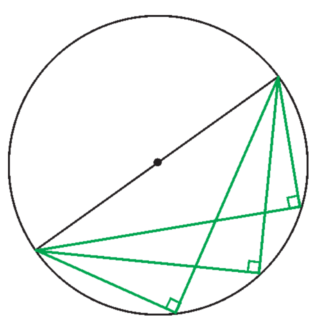


Рис. 3

Отрезок виден под острым углом из точек, лежащих вне круга, и под тупым углом – из точек, расположенных внутри круга.

Вот, например, из каких точек плоскости отрезок AC виден под углом 30°? Теорема о вписанном угле (рис. 4) позволяет найти ответ – объединение двух дуг, которое похоже на уши Чебурашки (рис. 5).

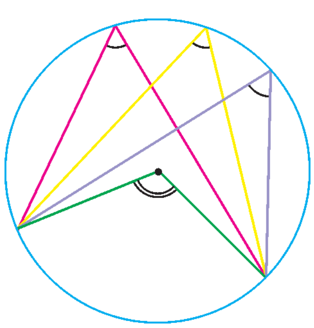


Рис. 4

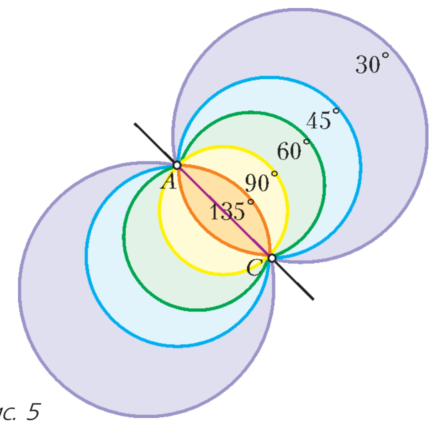


Рис. 5

Поставим тот же самый вопрос для точек пространства. Ответ следует из предыдущего: для данных точек A и C угол AXC равен 30° градусов в точности для точек X пространства, которые лежат на поверхности S, полученной вращением «ушей Чебурашки» вокруг оси AC. Это соображение позволяет решать весьма трудные задачи, вроде такой: *«Дана пирамида ABCD, в которой*

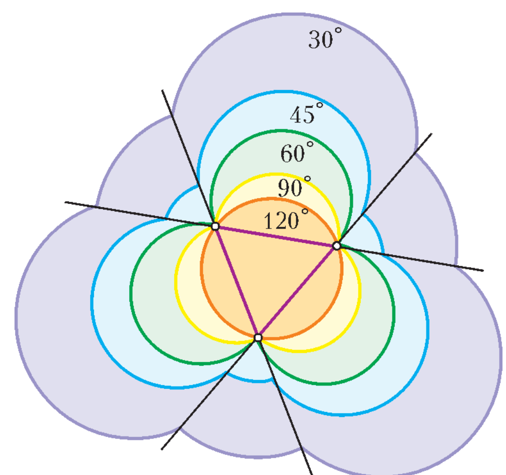


Рис. 6

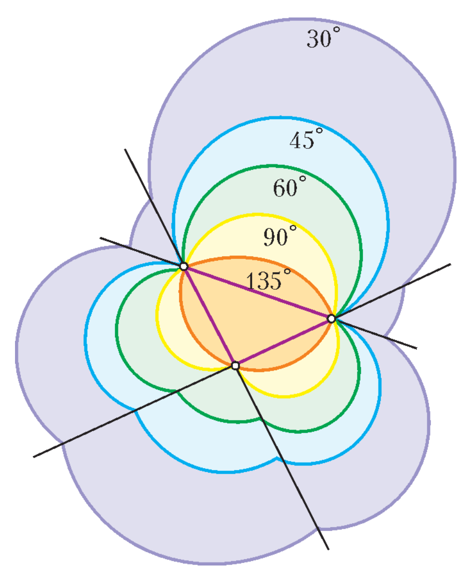


Рис. 7

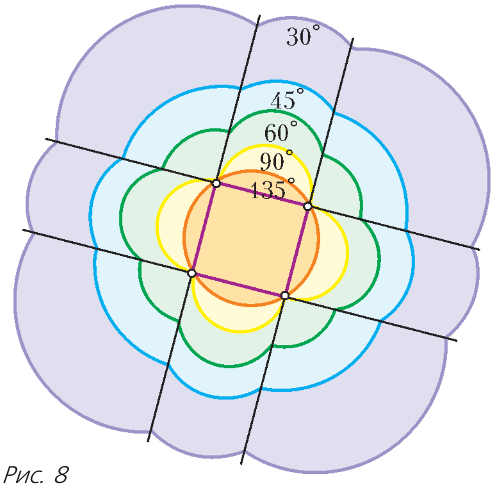


Рис. 8

ребро BD перпендикулярно грани ABC. Обязательно ли угол ABC больше угла ADC?» На такой вопрос большинство людей, не задумываясь, ответят положительно, так как из наглядных соображений кажется, что проекция угла всегда имеет меру, большую меры исходного. Оказывается, это не так!

Вот идея решения. Среди точек плоскости, из которых отрезок AC виден под углом 30° градусов, найдется такая точка B, что угол CAB больше 120° (подумайте, почему). Перпендикуляр, восставленный из точки B к плоскости ABC, имеет с поверхностью S общие точки, помимо точки B. Обозначив одну из таких точек через D, получаем пример пирамиды $ABCD$, в которой ребро BD перпендикулярно грани ABC, а углы ABC и ADC оба равны по 30° градусов.

Но – вернемся на плоскость.

Как надо двигаться, чтобы некоторая данная фигура – не обязательно отрезок – была видна под данным углом? Для многоугольника ответ, в силу теоремы о вписанном угле, состоит из дуг окружностей: на рисунках 6–8 изображены ответы для равностороннего треугольника, прямоугольного равнобедренного треугольника и квадрата.

Из каких точек видна под прямым углом парабола, заданная уравнением $y = ax^2$? Ответ весьма неожиданный (рис. 9): из точек горизонтальной прямой! Чтобы это доказать, рассмотрим произвольную точку $P(m;n)$ плоскости. Всевозможные невертикальные прямые, проходящие через эту точку, задаются уравнениями вида

$$y = k(x - m) + n,$$

где k – угловой коэффициент. Чтобы такая прямая касалась параболы, уравнение

$$ax^2 = k(x - m) + n$$

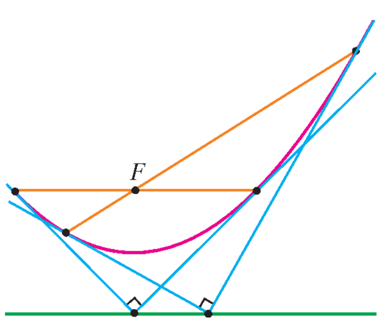


Рис. 9

должно иметь единственное решение. Записывая уравнение в виде

$$ax^2 - kx + (km - n) = 0$$

и вычисляя дискриминант

$$D = k^2 - 4a(km - n),$$

получаем уравнение

$$k^2 - 4akm + 4an = 0.$$

Чтобы парабола была видна из точки $P(m;n)$ под прямым углом, полученное уравнение должно иметь два решения k_1 и k_2, произведение которых равно -1. Поскольку в силу теоремы Виета произведение корней равно $4an$, приходим к равенству $4an = -1$, откуда $n = -\dfrac{1}{4a}$. Как видно, координата n фиксирована, а m может быть любым числом. Это как раз и означает, что все такие точки P расположены на горизонтальной прямой, пересекающей ось ординат в точке $\left(0; -\dfrac{1}{4a}\right)$. Эта прямая называется *директрисой* параболы.

Можно доказать, что парабола – геометрическое место точек, равноудаленных от директрисы и фиксированной точки, не лежащей на директрисе (эта точка называется *фокусом* параболы). Из этого определения можно геометрически вывести, что из точек директрисы парабола видна под прямым углом, а кроме того, все отрезки, соединяющие точки касания сторон прямого угла с параболой, проходят через ее фокус (точка F на рисунке 9). Подробнее можно прочитать, например, в статье В.Болтянского «Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы» («Квант» № 12 за 1975 г.) или в книге А.Акопяна и А.Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка» (М.: МЦНМО, 2007).

А из каких точек плоскости данная окружность видна под данным углом? Нетрудно понять, что ответом будет концентрическая ей окружность.

Красив ответ и для эллипса. Оказывается, эллипс, заданный уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, виден под прямым углом из точек окружности радиуса $\sqrt{a^2 + b^2}$ с центром в начале координат (рис. 10). Геометрическое доказательство можно найти, например, в уже упомянутой книге, а пока попытайтесь придумать алгебраическое доказательство.

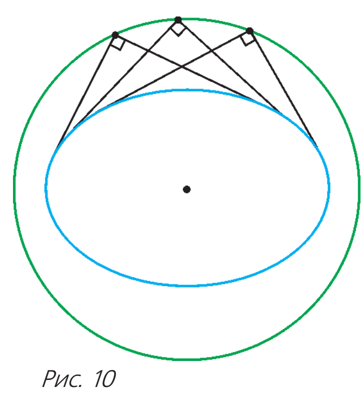


Рис. 10

А. Спивак

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу:* math@kvant.info *(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

1. Шахматная фигура, которая умеет ходить и как ладья, и как конь, называется канцлером, а фигура, сочетающая возможности ферзя и коня, – магараджей. Расставьте на шахматной доске 8×8 четыре канцлера и четыре магараджи так, чтобы ни одна из фигур не била никакую другую.

А.Грибалко

2. Числа A и B называются *дружественными*, если сумма всех делителей числа A, кроме самого A, равна B, а сумма всех делителей числа B, кроме самого B, равна A. (Например, 220 и 284 – дружественные.) Взяли два дружественных числа A и B. Затем нашли сумму чисел, обратных к делителям числа A, вычли единицу и получили результат α. Проделав то же самое для числа B, получили результат β. Чему равно произведение $\alpha\beta$?

Г.Гальперин

3. В стране 100 городов. Некоторые пары городов соединены автомобильной дорогой, и между любыми двумя городами есть авиационное сообщение. Известно, что из каждого города выходит нечетное число дорог. Путешественник хочет проехать по каждой дороге ровно один раз (в одном из двух направлений). Какое наименьшее число авиаперелетов ему для этого придется сделать?

П.Кожевников

4. Натуральное число a назовем *уютным*, если одно из чисел $a-1$ и $a+1$ простое, а другое – составное. Докажите, что уютных чисел бесконечно много.

Д.Швецов

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла BCD, при этом угол BCD равен $120°$ и угол BAD равен $30°$. Докажите, что периметр треугольника BCD равен длине диагонали AC.

В.Произволов

Об одной хорошо забытой старой задаче

В.ДОЦЕНКО, К.ШРАМОВ

Ехали медведи
На велосипеде,
А за ними раки
На хромой собаке,
А за ними кот
Задом наперед...

К.Чуковский

Введение

Весной 2005 года авторы этой статьи подбирали задачи для вступительных собеседований в 9 математический класс 57-й школы города Москвы. На одно из последних собеседований было решено выбрать несколько малоизвестных (хотя бы восьмиклассникам) довольно содержательных задач, решение каждой из которых было бы – по той или иной причине – серьезным аргументом в пользу того, что решивший ее школьник сможет учиться в математическом классе. Вот условие одной из них:

Расстояние между городами А и Б равно 30 км. Три туриста хотят добраться из города А в город Б. У них есть мотоцикл, на котором каждый из них может ехать со скоростью 60 км/ч, и велосипед, на котором каждый из них может перемещаться со скоростью 15 км/ч. Пешком каждый из них может перемещаться со скоростью 6 км/ч. Любое из средств передвижения можно оставить на дороге, чтобы кто-то из оставшихся туристов им воспользовался.

а) Докажите, что туристам не удастся организовать путешествие так, что прибывший последним затратит на путь менее 2,5 часов.

б) Объясните, как туристам нужно действовать, чтобы прибывший последним затратил ровно 2,5 часа.

(Как обнаружилось впоследствии, эта задача была ранее на одной из Соросовских олимпиад, в которой авторы статьи участвовали, будучи школьниками, – и, судя по всему, она запомнилась им именно оттуда.)

Пункт а) этой задачи оказался довольно трудным. (Попробуйте решить его, не читая статью дальше – но помните, что требуется именно доказательство, а не только «интуитивно ясное» рассуждение! Заметим, что не очевидно, скажем, что все транспортные средства должны оказаться в городе *Б* и что нет смысла ездить в обратном направлении.) В частности, решение, которое авторы имели в виду в момент составления варианта собеседования, было довольно неточным (как и решение, опубликованное в сборнике задач Соросовской олимпиады). Наоборот, пункт б) допускает много разных решений, в том числе и довольно «лобовых». Мы предложили ее на Заочном конкурсе по математике для 6–8 классов осенью 2005 года, и ее решили 65 человек из 307 участвовавших.

Здесь мы хотим обсудить эту задачу и предложить читателям несколько смежных исследовательских вопросов.

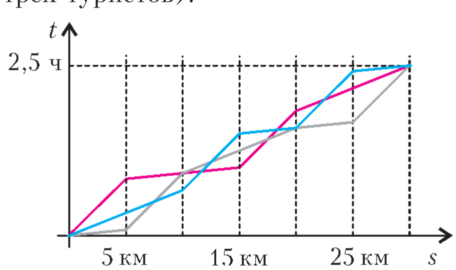
Конструкция

Заметим, во-первых, что требуемую конструкцию довольно легко обнаружить совершенно «лобовым» способом. А именно, нужно назначить «схему движения» (сколько раз и в каком порядке происходят обмены транспортных средств), после чего составить систему уравнений и решить ее. (В действительности нужно еще проверить, что каждое транспортное средство будет оказываться в точках обмена не позже, чем должно покинуть эти точки.)

Упражнение 1. Проверьте, что следующая схема движения может быть реализована:

- первый турист едет x километров на мотоцикле, потом идет y километров пешком, а остаток пути до *Б* едет велосипеде;
- второй турист едет $x + y$ километров на велосипеде, оставляет его первому и идет остаток пути пешком;
- третий турист идет x километров пешком, а остаток пути едет на мотоцикле, оставленном первым.

Довольно изящную схему движения предложил один из участников Заочного конкурса по математике (Евгений Джигалов, Москва). А именно, оказывается, можно разбить отрезок *АБ* на 6 частей и на каждой из этих частей назначить каждому из туристов одно из транспортных средств. Соответствующий график приведен на рисунке (красная, синяя и серая линии – «мировые линии» трех туристов).



Оценка на время

Дальше мы используем простое, но очень важное соображение.

Рассмотрим какую-нибудь точку, в которой не происходило разворотов, пересадок и остановок. В каждый момент времени число проходов через эту точку пешком в направлении из А в Б не меньше, чем разность числа людей между этой точкой и Б и числа транспортных средств между этой точкой и Б. (Не «равно», а именно «не меньше», так как кто-то мог уйти обратно.)

Это легко проверить, посмотрев, что происходит с течением времени с данными числами. Если человек пересекает эту точку пешком в сторону *Б*, то число проходов увеличивается, и разность тоже. Если проезжает, то и число проходов, и разность сохраняются. Так что если бы не было идеи возвращаться, то число проходов и разность всегда менялись бы одинаково. Но если идти или ехать назад, то число проходов неизменно, а разность может уменьшиться (при возвращении пешком) или остаться прежней.

Проверим, что путешествие не могло длиться менее 2,5 часов. Пусть на все путешествие было затрачено время t, причем за время путешествия самой правой точкой, в которой побывал велосипед, была точка B на отрезке *АБ*, а самой правой точкой, в которой побывал мотоцикл, – точка M на отрезке *АБ* (мы не предполагаем заранее, что все транспортные средства в результате оказались в *Б*, равно как не предполагаем и того, что во время путешествия никто не ехал и не шел назад). Тогда велосипед проехал не меньшее расстояние, чем AB, а мотоцикл – не меньшее, чем AM.

Докажем, что пешком всеми людьми в сумме было пройдено расстояние, не меньшее суммы отрезков *АБ*, *ВБ* и *МБ*. Без ограничения общности точка B лежит между A и M. Тогда на отрезке *МБ* ни одно транспортное средство не могло быть использовано, поэтому он пройден каждым человеком (хотя бы) один раз. На отрезке BM в распоряжении туристов есть только мотоцикл. Поэтому каждая «обычная» точка этого отрезка (в которой не происходит разворотов, пересадок и остановок) пройдена пешком как минимум два раза (через большое время между M и *Б* находятся три человека и одно транспортное средство) – возможно, что одним и тем же человеком, но это неважно. Аналогично, каждая обычная точка отрезка AB хотя бы один раз пройдена пешком (через большое время между B и *Б* три человека и два транспортных средства). Суммируя, получаем, что пешком пройдено не меньше, чем $AB + 2BM + 3MБ = AБ + BБ + MБ$. Отсюда

$$3t \geq \frac{AB}{15} + \frac{AM}{60} + \frac{AБ + BБ + MБ}{6} =$$

$$= \left(\frac{AB}{15} + \frac{BБ}{6}\right) + \left(\frac{AM}{60} + \frac{MБ}{6}\right) + \frac{AБ}{6} \geq$$

$$\geq \left(\frac{AB}{15} + \frac{BБ}{15}\right) + \left(\frac{AM}{60} + \frac{MБ}{60}\right) + \frac{AБ}{6} =$$

$$= AБ\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{60}\right) = 7{,}5,$$

и $t \geq 2{,}5$, что и требовалось.

Заметим, что из нашего решения следует, что для любого способа, при котором оценка в 2,5 часа достигается, все транспортные средства в результате оказались в городе *Б*, и никто из туристов за время путешествия не шел и не ехал назад. Действительно, нужно, чтобы

• путь, пройденный велосипедом, был равен *АВ* – т.е. велосипед не ехал назад (и аналогично для мотоцикла);

• суммарно пешком пройдено не меньше *АБ* + *ВБ* + + *МБ* – т.е. никто не шел назад;

• *ВБ* = *МБ* = 0 (поскольку, скажем, мы оценивали $\frac{ВБ}{6}$ снизу как $\frac{ВБ}{15}$) – т.е. *В* = *Б* и *М* = *Б*.

Различные обобщения задачи

Случай трех произвольных скоростей (оценка времени и ее достижимость). Самое первое обобщение, которое приходит в голову, состоит в том, чтобы рассмотреть случай трех произвольных скоростей a, b и c соответственно пешехода, велосипеда и мотоцикла; сохраняя видимость здравого смысла, мы считаем, что

$$a < b \le c.$$

Упражнение 2. Докажите, что туристам не удастся организовать путешествие так, что прибывший последним затратит по времени меньше

$$\tau = \frac{АБ}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Возникает вопрос, всегда ли полученная оценка достигается, – т.е. для любых ли скоростей можно подобрать схему движения, при которой время путешествия таково. Оказывается, что ответ здесь «нет». Поскольку, как мы видели выше, велосипед в результате оказался в городе *Б* [1], то он (а значит, и вся группа в целом) затратил на путешествие время, не меньшее $\frac{АБ}{b}$, которое должно быть не больше τ, откуда

$$\frac{1}{b} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

[1] *Обратите внимание, что здесь существенно строгое неравенство* $a < b$.

С другой стороны, можно заметить, что для такого неравенства на скорости схема путешествия существует (например, годится схема Е.Джигалова, приведенная выше). Подумайте, чему равно минимальное время в остальных случаях.

Случай *n* произвольных скоростей. Пусть теперь есть $n+1$ туристов и n транспортных средств, – т.е. даны числа $v_0 < v_1 \le v_2 \le \ldots \le v_n$, каждый турист может перемещаться пешком со скоростью v_0 и т.д.

Упражнение 3. Получите аналогичным образом оценку снизу

$$\tau = \frac{АБ}{n+1}\left(\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}\right)$$

на минимальное время путешествия.

Упражнение 4. Проверьте, что для того, чтобы это время могло быть реализовано, необходимо, чтобы

$$\frac{1}{v_1} \le \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}\right)$$

– т.е. вторая по величине скорость была не меньше среднего гармонического всех скоростей (или, что то же самое, что вторая по величине скорость не меньше среднего гармонического *всех остальных* – проверьте!).

Является ли это условие также и достаточным? Мы не знаем ответа на этот вопрос, хотя скорее всего это так и конструкция не очень сложна. Интересно было бы построить пример, аналогичный примеру Е.Джигалова в следующем точном смысле. Разобьем отрезок *АБ* на $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ равных частей. Упорядочим некоторым способом все перестановки транспортных средств (включая ноги) – таких перестановок ровно $n!$ – и назначим на k-м отрезке туристам транспортные средства в точности в соответствии с k-й перестановкой (назначим первому туристу транспортное средство, стоящее после перестановки на первом месте, второму – стоящее на втором месте, и т.д.).

Задача*. Верно ли, что полученная нижняя оценка достигается? Если да, верно ли, что она достигается с помощью такой схемы? (Иными словами, можно ли так упорядочить перестановки, что эта схема позволяет достичь нижней оценки времени?)

Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» 2008/09 учебного года

Лучших результатов в конкурсе добились

школьник

Дэниэл Линг, Беэр-Шева (Израиль), 8 кл.

и кружок

лицея 14, Тамбов, руководитель *А.В.Бурмистрова.*

Жюри конкурса отмечает также хорошие работы школьника

Сидристого Данила, Магнитогорск, школа 5, 8 кл.

и следующих кружков:

Центра дополнительного математического образования, Курган, руководители *О.И.Южаков, Е.Г.Пушкарева*,

лицея 3, Чебоксары, руководители *С.А.Иванов, А.В.Монов*,

«Эрудит» при ФМШ 32, Астрахань, руководитель *Т.М.Сергеева*,

«Эврика», Харьков, руководители *Е.Л.Аринкина, А.Л.Бернштейн.*

Победители конкурса награждаются DVD-дисками – электронным архивом журнала «Квант» с 1970 по 2008 год.