XXX Турнир городов

Задачи весеннего тура

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1 (3)[1]. В выпуклом 2009-угольнике проведены все диагонали. Прямая пересекает 2009-угольник, но не проходит через его вершины. Докажите, что прямая пересекает четное число диагоналей.

Г.Гальперин

2 (4). См. задачу М2131 «Задачника «Кванта».

3 (4). Володя хочет сделать набор кубиков одного размера и написать на каждой грани каждого кубика по одной цифре так, чтобы можно было из этих кубиков выложить любое 30-значное число. Какого наименьшего количества кубиков ему для этого хватит? (Цифры 6 и 9 при переворачивании не превращаются друг в друга.)

В.Замятин

4 (4). Натуральное число увеличили на 10% и снова получили натуральное число. Могла ли при этом сумма цифр уменьшиться ровно на 10%?

А.Шаповалов

5 (5). В ромбе $ABCD$ угол A равен 120°. На сторонах BC и CD взяты точки M и N так, что угол NAM равен 30°. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника NAM, лежит на диагонали ромба.

Р.Женодаров

10–11 классы

1 (3). См. задачу М2131 «Задачника «Кванта».

2 (4). См. задачу М2132 «Задачника «Кванта».

3. Для каждого натурального числа n обозначим через $O(n)$ его наибольший нечетный делитель. Даны произвольные натуральные числа $x_1 = a$ и $x_2 = b$. Построим бесконечную последовательность натуральных чисел по правилу: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$, где $n = 3, 4, \ldots$

а) (2) Докажите, что, начиная с некоторого места, все числа в последовательности будут равны одному и тому же числу.

б) (2) Как найти это число, зная числа a и b?

Г.Гальперин

4 (4). В ряд выписаны несколько нулей и единиц. Рассмотрим пары цифр в этом ряду (не только соседних), где левая цифра равна 1, а правая 0. Пусть среди этих пар ровно M таких, что между единицей и нулем этой пары стоит четное число цифр (возможно, ни одной), и ровно N таких, что между единицей и нулем этой пары стоит нечетное число цифр. Докажите, что $M \ge N$.

В.Ясинский

5 (4). Внутри некоторого тетраэдра взяли произвольную точку X. Через каждую вершину тетраэдра провели прямую, параллельную отрезку, соединяющему X с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что четыре полученные прямые пересекаются в одной точке.

С.Маркелов

[1] *Здесь и далее в скобках после номера каждой задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.*

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ [2]

8–9 классы

1 (3). Вася и Петя играют в следующую игру. На доске написаны два числа: $1/2009$ и $1/2008$. На каждом ходу Вася называет любое число x, а Петя увеличивает одно из чисел на доске (какое захочет) на x. Вася выигрывает, если в какой-то момент одно из чисел на доске станет равным 1. Сможет ли Вася выиграть, как бы ни действовал Петя?

Д.Баранов

2. а) (2) Докажите, что найдется многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую – в отношении 1 : 2.

б) (3) Найдется ли выпуклый многоугольник с таким свойством?

С.Маркелов

3 (5). В каждой клетке квадрата 101×101, кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Шахматная фигура «машина» может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машина попадает в клетку со знаком «прямо», то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком «поворот», то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли так расставить знаки, чтобы машина не могла попасть в дом?

А.Чеботарёв

4 (5). Дана бесконечная последовательность различных натуральных чисел. Известно, что каждый член этой последовательности (кроме первого) – либо среднее арифметическое, либо среднее геометрическое двух соседних с ним членов. Обязательно ли все члены этой последовательности, начиная с некоторого, – только средние арифметические либо только средние геометрические своих соседей?

А.Перепечко

5 (6). См. задачу М2133 «Задачника «Кванта».

6 (7). Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120° (рис.1) Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC (по закону «угол падения равен углу отражения»), попали на боковые стороны. В резуль-

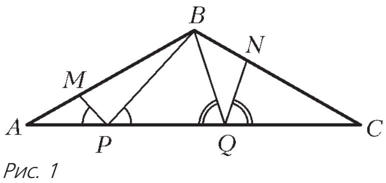


Рис. 1

[2] *В Турнире городов сложный вариант весеннего тура назначается на тот же день, когда проходит Московская математическая олимпиада, поэтому в Москве весенний тур турнира (сложный вариант) не проводится. Такая система сложилась потому, что сам Турнир городов замышлялся как распространение Московской математической олимпиады по другим городам. Поскольку оба соревнования проходят в один день, жюри имеют возможность использовать некоторые задачи и для турнира, и для олимпиады.*

тате исходный треугольник разделился на 5 меньших треугольников. Рассмотрим те три из них, которые примыкают к стороне AC. Докажите, что площадь среднего треугольника равна сумме площадей крайних треугольников.

В.Произволов

7 (9). См. задачу М2136 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1 (4). Прямоугольник разбили на несколько меньших прямоугольников. Могло ли оказаться, что для каждой пары полученных прямоугольников отрезок, соединяющий их центры, пересекает еще какой-нибудь прямоугольник?

М.Мурашкин

2 (4). См. задачу 4 для 8–9 классов.

3 (6). На каждой клетке доски 10×10 стоит фишка. Разрешается выбрать диагональ, на которой стоит четное число фишек, и снять с нее любую фишку. Какое наибольшее число фишек можно убрать с доски такими операциями?

М.Мурашкин

4 (6). См. задачу М2134 «Задачника «Кванта».

5 (8). См. задачу М2136 «Задачника «Кванта».

6 (9). Дано целое число $n > 1$. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый – красным цветом, второй – синим. Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше – тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков – ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл противник?

А.Шаповалов

7 (9). См. задачу М2138 «Задачника «Кванта».

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. На доске написаны числа 1, 2, …, 100. Разрешается стереть два числа и написать вместо них их сумму или их произведение. Какое наибольшее число может остаться на доске после 99 таких операций?

И.Богданов

2. Хромая ладья обошла часть шахматной доски, начав свой путь на клетке $d4$ (рис. 2). Известно, что ни на какой клетке она не была дважды, посетила все четыре угла доски, причем на клетку $a1$ она попала с клетки $a2$, на клетку $a8$ она попала с клетки $a7$ и на клетку $h8$ она попала с клетки $h7$. С какой клетки она попала на клетку $h1$? (Хромая ладья ходит по вертикали и горизонтали на 1 клетку).

А.Толпыго

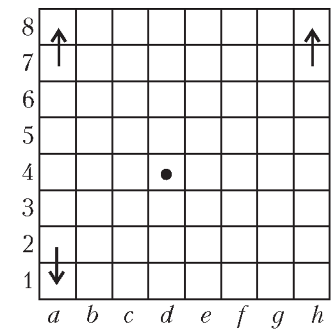


Рис. 2

3. Даны n цветов с номерами от 1 до n. Для каждого k от 1 до n пусть $f_k(n)$ обозначает количество способов окрасить натуральные числа от 1 до n в первые k цветов (каждый из этих цветов должен присутствовать). Докажите, что

$$\left|f_1(n) - f_2(n) + f_3(n) - f_4(n) + f_5(n) - f_6(n) + \ldots\right| = 1 .$$

(Раскраски, отличающиеся перестановкой цветов, считаются разными. Например, $f_1(2) = 1$ и $f_2(2) = 2$.)

М.Берштейн, Г.Мерзон

4. Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$, кроме ребра CD. Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра, кроме ребра AB.

В.Произволов

5. Дан многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами. Известно, что для каждого натурального n найдется такое натуральное k, что $P\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{k}$. Докажите, что найдутся такие числа c и m, что $P(x) = cx^m$.

С.Спиридонов

6. Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравей знает, сколько он прополз.)

А.Шаповалов

Публикацию подготовил С.Дориченко

Избранные задачи LXXII Московской математической олимпиады

1. У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырехзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова? (6)

И.Раскина

В скобках после текста каждой задачи указан класс, в котором она предлагалась.

2. Разрежьте фигуру на рисунке 1 на 8 одинаковых частей. (6)

Фольклор


Рис. 1

3. В парке росли липы и клены. Кленов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего кленов стало 20%. А осенью посадили клены, и кле-

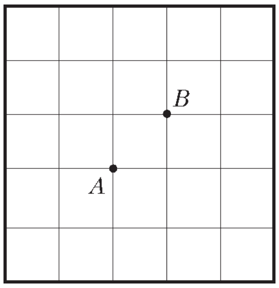


Рис. 2

нов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год? (6)

Д.Шноль

4. Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане; рис.2) до своего отеля (точка B). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрестке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет. (6)

И.Ященко

5. Петя и Вася живут в соседних домах (см. план на рис. 3). Вася живет в четвертом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путем (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живет Петя. (7)

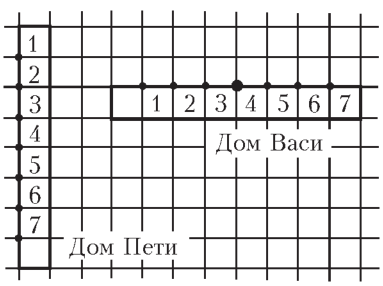


Рис. 3

А.Хачатурян

6. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зеленый: «Вместе у нас 27 ног», желтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног? (7)

Д.Шноль

7. Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, …, или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос? (7)

И.Раскина

8. Начертите два четырехугольника с вершинами в узлах сетки, из которых можно сложить а) как треугольник, так и пятиугольник; б) и треугольник, и четырехугольник, и пятиугольник. Покажите, как это можно сделать. (7)

Д.Шноль

9. На доске написано:

В этом предложении …% цифр делятся на 2, …% цифр делятся на 3, а …% цифр делятся и на 2, и на 3.

Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным. (8)

А.Шаповалов

10. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в ее середине. Найдите углы треугольника ABC. (8)

И.Богданов

11. Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ (a, b и c – отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его. (8)

В.Клепцын

12. Две точки на плоскости несложно соединить тремя ломаными так, чтобы получилось два равных многоугольника (например, как на рис.4). Соедините две точки четырьмя ломаными так, чтобы все три получившихся многоугольника были равны. (Ломаные несамопересекающиеся и не имеют общих точек, кроме концов.) (8)

С.Маркелов

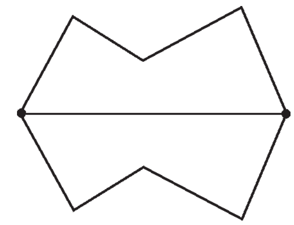


Рис. 4

13. Двое играющих по очереди пишут – каждый на своей половине доски – по одному натуральному числу (повторения разрешаются) так, чтобы сумма всех чисел на доске не превосходила 10000. После того, как сумма всех *чисел* на доске становится равной 10000, игра заканчивается подсчетом суммы всех *цифр* на каждой половине. Выигрывает тот, на чьей половине сумма цифр меньше (при равных суммах – ничья). Может ли кто-нибудь из игроков выиграть, как бы ни играл противник? (8)

А.Шаповалов

14. После урока на доске остался график функции $y = \frac{k}{x}$ и пять прямых, параллельных прямой $y = kx$ ($k \neq 0$). Найдите произведение абсцисс всех десяти точек пересечения. (9)

А.Блинков

15. На кольцо свободно нанизано 2009 бусинок. За один ход любую бусинку можно передвинуть так, чтобы она оказалась ровно посередине между двумя соседними. Существуют ли такие изначальная расстановка бусинок и последовательность ходов, при которых какая-то бусинка пройдет хотя бы один полный круг? (10)

И.Шанин

16. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 – ортоцентры треугольников CAA_1 и CBB_1. Докажите, что прямая A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C. (10)

А.Заславский

17. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции

$$y = \sin x, \quad x \in (0; \alpha).$$

Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если:

а) $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; б) $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$? (11)

А.Галочкин

18. Через каждую вершину четырехугольника проведена прямая, проходящая через центр вписанной в него окружности. Три из этих прямых обладают тем свойством, что каждая из них делит площадь четырехугольника на две равновеликие части.

а) Докажите, что и четвертая прямая обладает тем же свойством.

б) Какие значения могут принимать углы этого четырехугольника, если один из них равен 72°? (11)

А.Канунников

19. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$. (11)

А.Канунников

20. Докажите, что при любом разбиении ста «двузначных» чисел 00, 01, …, 99 на две группы некоторые числа хотя бы одной группы можно записать в ряд так, чтобы любые два соседних числа этого ряда отличались друг от друга на 1, 10 или 11, и хотя бы в одном из двух разрядов (единиц или десятков) встречались все 10 различных цифр. (11)

О.Косухин

Публикацию подготовил С.Дориченко

Избранные задачи Московской физической олимпиады

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. Два друга Егор и Петя устроили гонки на велосипедах вокруг квартала в дачном поселке (рис.1). Стартовав одновременно из точки B в разные стороны, Егор вдоль улицы BA, Петя вдоль улиц BC и CA, друзья встретились через 4 минуты в точке A и продолжили гонки с постоянными по модулю скоростями, объезжая квартал раз за разом в противоположных направлениях. Через какое минимальное время после первой встречи они снова окажутся вместе в точке A?

М.Семенов

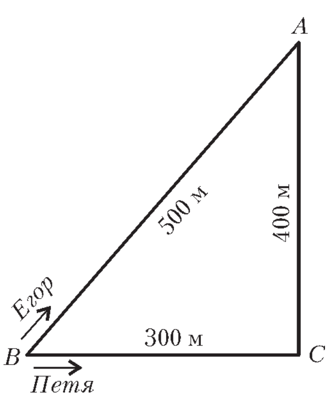


Рис. 1

2. В системе, изображенной на рисунке 2, масса самого правого груза равна $m_4 = 1$ кг, а массы всех блоков одинаковы и равны $m_0 = 300$ г. Система уравновешена и неподвижна. Найдите массы грузов m_1, m_2 и m_3. Массой троса и трением в блоках пренебречь.

М.Ромашка

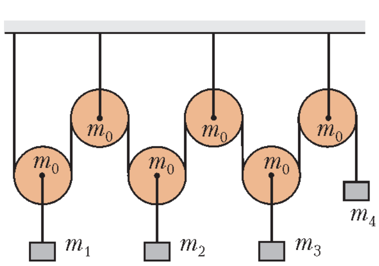


Рис. 2

3. Пятидесятиметровый бассейн шириной 20 м имеет профиль дна, показанный на рисунке 3: через каждые 12,5 м глубина бассейна увеличивается на 1 м. Пустой бассейн начинают заполнять водой, наливая ее со скоростью 1000 литров в минуту. Постройте график зависимости высоты h уровня воды над самой глубокой частью дна бассейна от времени t и определите, через какое время бассейн заполнится водой доверху.

М.Семенов

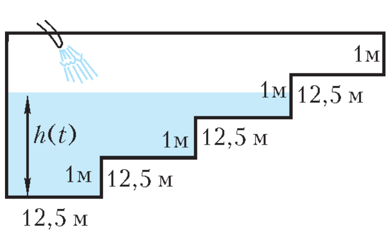


Рис. 3

4. У школьника Андрея есть стеклянная пробирка массой $M = 80$ г и вместимостью $V = 60$ мл. Он опустил пробирку в цилиндрический сосуд с водой и постепенно насыпал на дно пробирки песок до тех пор, пока она не погрузилась в воду по горлышко (рис.4). Затем Андрей измерил массу песка, находившегося в пробирке в этот момент, и она оказалась равной $m = 12$ г. Внутренний радиус сосуда, в который опущена пробирка, равен $R = 5$ см. Плотность воды $\rho_в = 1\ г/см^3$. Определите по этим данным плотность стекла пробирки и вычислите, на сколько поднялся уровень воды в сосуде в результате погружения пробирки в воду.

М.Ромашка

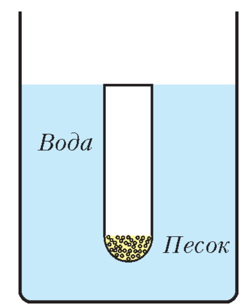


Рис. 4

8 класс

1. Так называемый «китайский ворот» представляет собой два цилиндрических вала радиусами r и R, насаженных на общую ось, закрепленную горизонтально (рис.5; вид сбоку). На валы в противоположных направлениях намотана веревка, на которой висит подвижный блок такого радиуса, что свободные участки веревки практически вертикальны. К оси блока прикреплен груз массой m. Ворот снабжен ручкой, конец которой находится на расстоянии $2R$ от оси ворота. 1) Ворот вращают за ручку так, что он делает n оборотов в секунду. С какой скоростью при этом движется груз, если веревка нигде не проскальзывает? 2) Какую силу необходимо прикладывать к концу ручки ворота для

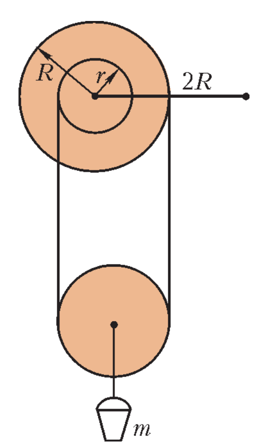


Рис. 5

того, чтобы равномерно поднимать груз, если веревка и блок очень легкие, а трения нет?

А.Якута

2. Нарисуйте схему, состоящую из батарейки, двух переключателей и трех лампочек (рис.6) и имеющую при различных положениях переключателей следующие режимы работы: 1) горит первая лампа; 2) горит вторая лампа; 3) горит третья лампа; 4) горят все три лампы. В последнем случае каждая из ламп должна гореть так же ярко, как и тогда, когда она горит одна.

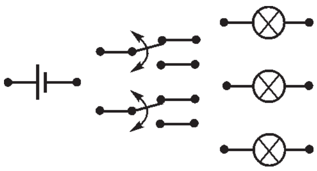


Рис. 6

Д.Харабадзе

9 класс

1. Резисторы сопротивлениями $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 40$ Ом и $R_4 = 80$ Ом припаяны к клеммам A, B, C, D и E так, как показано на рисунке 7. Имеется источник тока с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом, а также много соединительных проводов малого сопротивления, которые можно подключать к источнику и к любой из клемм. Как нужно соединить источник и резисторы, чтобы общая тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, была максимальной? Чему равна эта мощность?

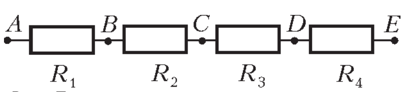


Рис. 7

М.Ромашка

2. Палка, стоящая вертикально на горизонтальной площадке, освещаемой солнечным светом, имеет высоту $h = 1{,}2$ м и отбрасывает тень длиной $L = 0{,}9$ м. Палку начинают медленно наклонять в направлении отбрасываемой ею тени так, что ее нижний конец не сдвигается с места. Длина тени при этом до определенного момента увеличивается, а потом начинает уменьшаться. Чему была равна максимальная длина тени от палки?

М.Ромашка

10 класс

1. Автомобиль с задними ведущими колесами въезжает вверх по прямолинейному участку дороги, образующему с горизонтом угол α, и останавливается. Через некоторое время после этого водитель резко нажимает на газ и одновременно отпускает тормоз. С каким максимальным ускорением может начать двигаться автомобиль, если коэффициент трения его колес о дорогу μ, а мощность двигателя достаточно велика? Центр тяжести автомобиля находится на расстоянии h от дороги посередине между колесами, расстояние между осями передних и задних колес $2L$.

В.Погожев

2. В цилиндрический стакан объемом $V = 200$ мл и сечением $S = 20\ см^2$, стоящий на столе и находящийся при комнатной температуре $t_к = 20\ °C$, положили кусок льда массой $m = 100$ г при температуре $t_0 = 0\ °C$ и накрыли стакан плотно прилегающей крышкой. Оцените силу, которая потребуется, чтобы оторвать крышку от стакана сразу после того, как лед растает. Считайте, что тепло поступает в стакан только снизу, крышку отрывают сразу по всему периметру, атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па, плотность льда $\rho_л = 900\ кг/м^3$, плотность воды $\rho_в = 1000\ кг/м^3$.

Ю.Старокуров

3. Пять сторон правильного шестиугольника образованы одинаковыми диэлектрическими равномерно заряженными палочками. При этом в точке O, находящейся в центре шестиугольника, потенциал данной системы зарядов равен φ_0, а напряженность электрического поля равна $\vec{E}_0$. Какими станут потенциал φ и напряженность электрического поля $\vec{E}$ в точке O, если убрать одну из заряженных палочек?

Ю.Старокуров, М.Семенов

11 класс

1. Один цилиндрический сосуд радиусом R_1 удерживают внутри другого сосуда радиусом R_2 так, как показано на рисунке 8. В дне малого сосуда есть отверстие со втулкой, в которое вставлен деревянный цилиндр радиусом r и высотой $h = 21$ см; он может перемещаться относительно втулки без трения только по вертикали. В малый сосуд налита вода до уровня $a = 30$ см, а в большой налито масло, и при этом цилиндр покоится.

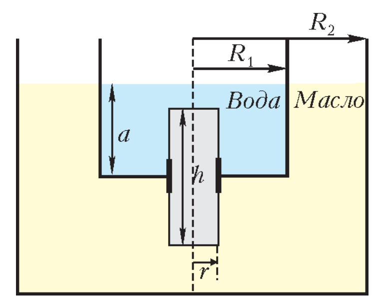


Рис. 8

Плотность воды $\rho_в = 1000\ кг/м^3$, плотность масла $\rho_м = 790\ кг/м^3$, плотность цилиндра $\rho = 600\ кг/м^3$. Какая часть объема цилиндра находится в воде, а какая – в масле? При каком соотношении между $\rho_в$, $\rho_м$, r, R_1 и R_2 равновесие цилиндра будет устойчивым, т.е. при его смещении вверх или вниз будут возникать силы, стремящиеся вернуть его обратно к положению равновесия?

М.Ромашка

2. Три прилегающие друг к другу грани кубика заряжены равномерно с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, а остальные грани – с плотностью заряда $-\sigma$. Найдите напряженность $\vec{E}$ электрического поля в центре кубика.

С.Кротов

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. На столе стоит цилиндрический стакан с водой. В его середину начинают медленно насыпать мелкие стеклянные шарики. Процесс насыпания продолжается до тех пор, пока некоторое количество шариков не высыпется из стакана. Нарисуйте и поясните, не проводя детальных расчетов, график зависимости суммарной силы F давления на дно стакана от веса p уже насыпанных шариков, если вес воды, заполнявшей стакан вначале примерно на $3/4$ высоты, был равен P, плотность стекла приблизительно в 2,5 раза больше плотности воды, а трением можно пренебречь.

М.Семенов

2. В трех калориметрах находится по $M = 20$ г воды одной и той же температуры. В калориметры погружают льдинки, также имеющие одинаковые температуры (но другие): в первый – льдинку массой $m_1 = 10$ г, во второй – массой $m_2 = 20$ г, в третий – массой $m_3 = 40$ г. Когда в калориметрах установилось равновесие, оказалось, что масса первой льдинки стала $m_1' = 9$ г, а масса второй льдинки осталась прежней. Какой стала масса третьей льдинки?

О.Шведов

9 класс

1. Тело движется по прямой в одном направлении. В каждый момент времени вычисляется средняя скорость

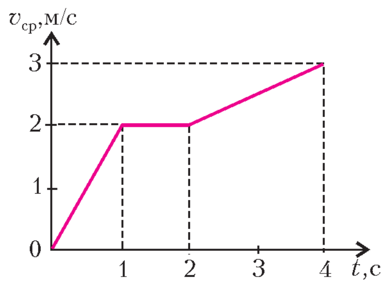


Рис. 9

движения тела за время от начального до текущего момента. На рисунке 9 приведен график зависимости вычисленной таким образом средней скорости тела $v_{ср}$ от времени t. Постройте график зависимости мгновенной скорости тела от времени.

М.Ромашка

2. В системе, показанной на рисунке 10, неподвижный блок прикреплен к потолку комнаты, а все грузы удерживают неподвижными так, чтобы отрезки легкой нерастяжимой нити, не лежащие на блоках, были вертикальными. Грузы массами m_2 и m_3 подвешены к осям блоков на жестких легких стержнях. Все блоки легкие и могут вращаться вокруг своих осей без трения. Определите ускорение груза массой m_2 после одновременного отпускания всех грузов.

В.Погожев

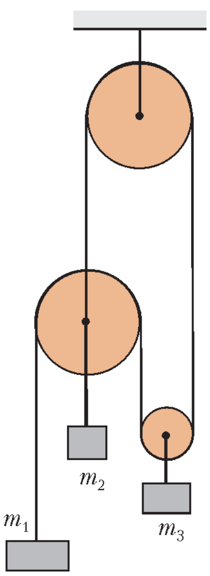


Рис. 10

3. В широком сосуде глубиной $2H$ находится жидкость, плотность ρ которой зависит от глубины x так, как показано на рисунке 11 (величина ρ_0

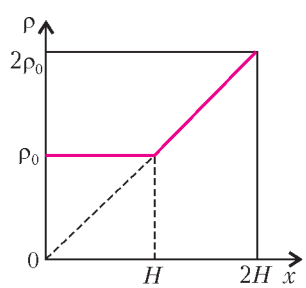


Рис. 11

известна). В сосуд аккуратно опускают плоскую шайбу высотой $h < H$ и плотностью ρ_1. Найдите, на какую глубину будет погружено нижнее основание шайбы после установления ее равновесия. Считать, что основания шайбы все время остаются горизонтальными, а слои жидкости при погружении шайбы не перемешиваются.

Е.Якута

10 класс

1. Капитан корабля заметил строго на севере береговой маяк и приказал держать курс на него. В этот момент расстояние до берега составляло $s = 30$ км. Корабль движется относительно воды со скоростью $v = 15$ км/ч и в каждый момент времени держит курс на маяк. Экипаж не знает о присутствии в море западного течения, скорость которого во всех точках одинакова и равна $u = 5$ км/ч. За какое время корабль доплывет до маяка? За какое время он доплыл бы до маяка, двигаясь по кратчайшей траектории?

М.Ромашка

2. На рисунке 12 изображен график циклического равновесного процесса, проводимого над одним молем идеального одноатомного газа. По горизонтали отложена работа, совершенная газом с момента начала процесса, по вертикали отложено количество теплоты, полученное газом. Изобразите график процесса в (pV)-координатах и определите отношение максимальной температуры газа к его минимальной температуре.

О.Шведов

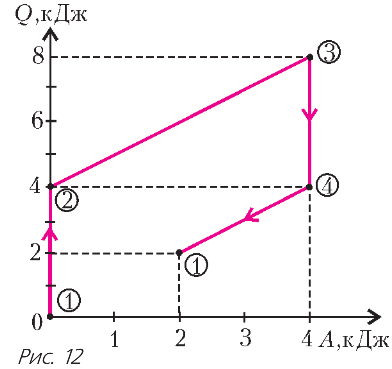


Рис. 12

3. Тонкое проволочное кольцо разорвалось, когда нанесенный на него заряд превысил q_1. Какой заряд можно нанести на второе кольцо, радиус которого в n раз больше, а прочность проволоки на разрыв в k раз выше, чтобы второе кольцо не разорвалось?

В.Погожев

11 класс

1. Тонкий диск катится по горизонтальной плоскости без скольжения, опираясь в каждый момент времени по диаметру своего основания на гладкую боковую поверхность прямого кругового конуса, стоящего на этой плоскости. Угол при вершине конуса 2α, радиус основания конуса равен радиусу диска (рис.13). Определите скорости крайних точек горизонтального диаметра диска, если его центр движется со скоростью v. Есть ли на диске точки, движущиеся с большей скоростью, чем крайние точки горизонтального диаметра?

С.Кротов

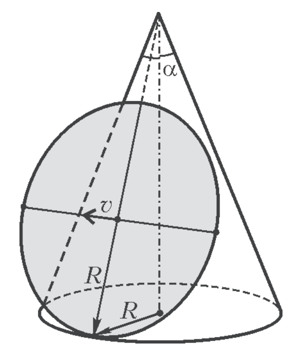


Рис. 13

2. Из тонкой жесткой проволоки изготовили кольцо радиусом R, которое закрепили так, чтобы его плоскость была горизонтальной. На кольцо нанесли заряд Q. На оси кольца на высоте h над ним удерживают маленький шарик массой m, имеющий одноименный с кольцом заряд q. Какую по модулю скорость надо сообщить шарику, толкнув его вверх, чтобы он, двигаясь по вертикали, пролетел в дальнейшем сквозь кольцо?

В.Погожев

3. На гладком столе стоит коробка массой m. На дне коробки находятся два бруска, масса каждого из которых также равна m. Трения в системе нет. Левый брусок соединен со стенкой коробки легкой горизонтальной пружиной жесткостью k. Правому бруску сообщили скорость v_0 в направлении левого бруска. При столкновении бруски слипаются и движутся дальше как одно целое. Найдите максимальную скорость коробки и максимальное сжатие пружины при дальнейшем движении.

М.Ромашка

4. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шарика радиусом R, центр которого находится на главной оптической оси линзы на расстоянии l от нее. Определите расстояние d от линзы до точечного источника света, расположенного на оптической оси системы, если изображение источника в данной системе совпадает с самим источником.

Ю.Старокуров

Публикацию подготовили
М.Семенов, О.Шведов, А.Якута

XIII Международный турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб «Глюон» вновь собирал одаренных школьников и талантливых студентов на свой турнир «Компьютерная физика». Цель турнира – поддержка талантливой молодежи, проявившей интерес к фундаментальной науке и новым информационным технологиям. Задача организаторов турнира – создание временных творческих коллективов для решения современных научных проблем. В такие коллективы входят школьники, учителя, студенты, аспиранты, ученые. Традиционно, турнир проводится в два тура – заочный и очный.

Заочный тур XIII Турнира «Компьютерная физика» начался в сентябре 2008 года рассылкой задания по заявкам в лицеи, школы и гимназии. (Задание заочного тура было опубликовано также в журнале «Квант» №4 за 2008 год, что значительно увеличило число команд-участниц турнира.) Шесть лучших команд были приглашены на финал – очный тур соревнований.

Очный тур XIII Турнира был проведен с 1 по 8 февраля 2009 года в городе Протвино на базе Института физики высоких энергий при участии и поддержке МГУ им. М.В.Ломоносова, фонда «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С», журналов «Квант» и «Физика в школе» и Издательского дома «Первое сентября». Оргкомитет турнира выражает благодарность всем названным организациям за помощь в проведении турнира и поддержку одаренных школьников и талантливых студентов.

По итогам двух туров абсолютным победителем XIII Турнира стала команда Медико-технического лицея города Самары, получившая переходящий приз «Хрустальный глобус» и диплом I степени. Дипломом I степени и памятными знаками была награждена также команда лицея 1511 при Московском инженерно-физическом институте. Дипломы II степени получили команды Классического лицея 1 города Ростов-на-Дону и ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э.Баумана, а дипломы III степени – команды Самарского международного аэрокосмического лицея и лицея 51 города Тольятти. Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

В рамках турнира был проведен конкурс компьютерного творчества, а также конкурс «Виртуальная физическая лаборатория» (разработанный компанией «Физикон»).

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в XIV Турнире «Компьютерная физика» в январе–феврале 2010 года.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., д.15/2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт для информации: www. gluon.ru

Ниже приводится заочное задание XIV Турнира «Компьютерная физика».

ЗАОЧНЫЙ ТУР «ПЛАНЕТНАЯ СИСТЕМА»

Процесс образования планетных систем является одним из центральных в астрофизике. По современным представлениям, планетная система вокруг звезды формируется из газопылевого облака. Сложные механические и термодинамические процессы, обусловленные действием гравитационных сил, соударениями между собой пылевых частиц и образующихся из них тел, а также взаимодействием тел и пыли с газом, приводят к образованию больших и малых планет и их размещению на стационарных орбитах. Так же могут образоваться спутники планет, пылевые кольцевые скопления и другие компоненты звездно-планетной системы.

Команда-победительница XIII Турнира «Компьютерная физика»

Рассмотрим формирование планетной системы из облака малых одинаковых шарообразных тел радиусом $r = 1$ м, находящихся в поле тяготения центрального шарообразного тела радиусом $R = 10^3$ м. Будем считать, что движение тел происходит в одной плоскости, плотности малых и большого тел одинаковы и равны $\rho = 5500$ кг/м^3, радиус рассматриваемой области $L = 10^9$ м. Первоначальное расположение малых тел – равномерное по плоскости, их концентрация равна $n = 10^{-4}$ м$^{-2}$. Облако малых тел в начальный момент времени вращается как единое тело с угловой скоростью $\omega = 4 \cdot 10^{-8}$ рад/с.

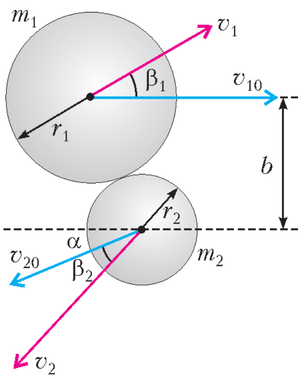
Малые тела взаимодействуют между собой и с центральным массивным телом гравитационными силами. Поскольку тела сферические, для расчета сил притяжения можно воспользоваться выражением

$$F = G\frac{m_1 m_2}{l^2},$$

где G – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел, l – расстояние между центрами этих тел. В процессе движения тела могут испытывать попарные упругие и неупругие столкновения. При упругих столкновениях сохраняются суммарный импульс и суммарная кинетическая энергия взаимодействующих тел, при неупругих – только суммарный импульс, а сами тела «слипаются» в единое целое. В нашей задаче будем считать, что при неупругих соударениях сферических тел образуются также сферические тела.

Взаимное расположение двух сферических тел в момент соударения показано на рисунке, где $\vec{v}_{10}$ и $\vec{v}_{20}$ – скорости тел до соударения, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – после соударения. Направление начальной скорости второго тела относительно направления начальной скорости первого тела характеризуется углом α, а направления конечных скоростей тел относительно начальных – углами β_1 и β_2. Расстояние b между направлением скорости первого тела и центром второго тела в момент соударения называется прицельным параметром.

Траекторию j-й движущейся частицы можно рассчитать, воспользовавшись уравнением движения



$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1,i\neq j}^{N} \vec{F}_i ,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы, N – число тел в системе, $\vec{F_i}$ – сила, действующая на рассматриваемую частицу со стороны i-го тела, причем индекс «i» относится ко всем остальным телам системы. Численное решение дифференциальных уравнений второго порядка – это сложная процедура, однако можно одно уравнение второго порядка свести к двум уравнениям первого порядка. Запишем эти уравнения для одной из проекций:

$$mv'_x = \sum F_{ix} , \quad x' = v_x ,$$

где v – скорость частицы, x – координата частицы. Конечно-разностная схема для численного решения этой системы уравнений проще, чем для исходного уравнения. Например, конечно-разностная производная от скорости по времени вычисляется как $v' = (v - v_0)/\Delta t$, где v_0 – скорость частицы в некоторый момент времени t_0, v – скорость частицы через малый интервал времени Δt. Для координаты конечно-разностная производная строится аналогично.

Задание

1. Исследуйте, формируются ли кольцеобразные скопления мелких частиц в случае, когда в системе все соударения мелких частиц с центральным массивным телом и друг с другом абсолютно упругие.

2. Исследуйте, формируются ли стационарные орбиты образовавшихся крупных частиц-планет в случае, когда в системе существуют только неупругие столкновения.

3. Исследуйте, формируются ли стационарные орбиты образовавшихся крупных частиц-планет в случае, когда в системе существуют как упругие, так и неупругие столкновения. Неупругие столкновения происходят между мелкими частицами, мелкими частицами и телами, образующимися из них, а также между образующимися телами, если в момент соударения прицельный параметр b не превосходит трети радиуса меньшего тела и угол α между скоростями до соударения меньше 45°. Остальные соударения – абсолютно упругие.

Публикацию подготовили
В.Альминдеров, А.Кравцов

Всероссийская студенческая олимпиада по физике

С 12 по 14 ноября 2008 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана проходила очередная всероссийская физическая олимпиада среди студентов технических вузов.

По результатам олимпиады, в командном зачете первое место заняла команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ), набравшая 151 балл, второе место заняла команда МГТУ им. Н.Э.Баумана (109 баллов), третье место – команда Балтийского государственного технического университета (БГТУ) «Военмех» им. Д.Ф.Устинова (101 балл).

В личном зачете первое место завоевал Ярослав Бельтюков (СПбГПУ), второе место завоевал Павел Мостовых (БГТУ), третье место – Максим Пестременко (СПбГПУ).

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Три жука находятся в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с катетом a. Первый жук ползет вдоль гипотенузы из точки A к точке B, второй жук с такой же скоростью ползет из точки B перпендикулярно стороне AB в сторону точки C. Определите, с какой скоростью ползет третий жук и какой путь он преодолеет до встречи, если он движется таким образом, что треугольник, соединяющий жуков, все время подобен исходному.

2. Орбитальная околоземная станция массой m находится на низкой круговой орбите. Определите, на какой угол повернется плоскость орбиты, если включить двигатель, сила тяги которого перпендикулярна скорости и равна mg, на время, равное $1/\left(4\sqrt{2}\right)$ периода обращения станции вокруг Земли, таким образом, что скорость станции не изменяется.

3. Гвоздь диаметром d вбит в доску на глубину l. Сила трения между гвоздем и доской пропорциональна длине забитой части гвоздя, ее максимальное значение равно $f = kl$. Определите работу по вытягиванию гвоздя из доски клещами, если сила, приложенная к доске со стороны гвоздя, ограничена величиной $F < f$.

4. Невесомый цилиндр радиусом R лежит на горизонтальной поверхности и неподвижно закреплен на ней. На цилиндр положили доску длиной $l = 2\sqrt{3}R$ таким образом, что ее центр тяжести совпадает с точкой касания доски с цилиндром. Определите ускорение доски, если между доской, цилиндром и поверхностью отсутствует трение.

5. Аксиально симметричный сосуд высотой H и максимальным диаметром D доверху наполнен водой и плотно закрыт крышкой. Сосуд вращается вокруг вертикальной оси симметрии таким образом, что давление воды на стенки сосуда во всех точках одинаково. Определите объем воды в сосуде.

6. Тепловая машина работает с одним молем одноатомного газа по циклу, состоящему из двух изохор и двух адиабат. Температура нагревателя T_1, температура охладителя T_2. Определите максимальную работу, которая может быть выполнена в данном цикле.

7. В однородном магнитном поле с вертикально ориентированным вектором индукции $\vec{B}$ на гладкой горизонтальной плоскости лежит тело массой m и зарядом q на расстоянии R от отверстия в плоскости. К телу привязана нить, пропущенная через это отверстие, сила натяжения нити пропорциональна расстоянию между телом и отверстием и в начальный момент равна F. Определите минимальное расстояние между телом и отверстием в процессе дальнейшего движения.

8. Плоская стоячая электромагнитная волна находится между двумя проводящими параллельными пластинами, расстояние между которыми равно длине волны λ. Определите точки, в которых среднее значение объемной плотности энергии электромагнитного поля волны максимально.

9. Плоская световая волна с длиной волны λ, пройдя через зонную пластинку, создает в точке наблюдения интенсивность света I_0. Во сколько раз изменится интенсивность света, если на зонную пластинку накладывается фазовая пластинка, созданная для той же точки наблюдения при длине волны, равной $\lambda/2$?

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

ИНФОРМАЦИЯ

Избранные задачи собеседований в 9 математический класс 57 школы

Каждую весну Московская государственная Пятьдесят седьмая школа проводит собеседования для школьников, поступающих в 8 и 9 математические классы. На таких собеседованиях предлагаются задачи, каждый год новые (не все из них, разумеется, придуманы специально для собеседований, но педагоги стремятся к тому, чтобы вопиюще известными эти задачи не были). Некоторые из них очень просты, некоторые весьма сложны.

Мы приводим избранные задачи для поступающих в 9 класс одного из таких собеседований прошлых лет.

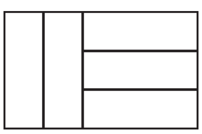


Рис. 1

1. Прямоугольник сложен из пяти одинаковых паркетных плиток, как показано на рисунке 1. Найдите отношение его сторон.

2. Три колокола начинают бить одновременно. Интервалы между ударами составляют 4 секунды, $5/3$ секунды и 2,4 секунды соответственно. Совпавшие по времени удары воспринимаются как один. Сколько ударов будет услышано за минуту (считая первый и последний)?

3. Укажите все целые положительные числа, при делении на которые числа 3213, 3361 и 3583 дают одинаковые остатки.

4. Два карандаша – один шестигранный, а второй с квадратным сечением – положили на длинный письменный стол. Оказалось, что расстояния между противоположными гранями у них равны (рис.2). Перекатывая через ребра, каждый из них прокатили от одного края стола до другого.

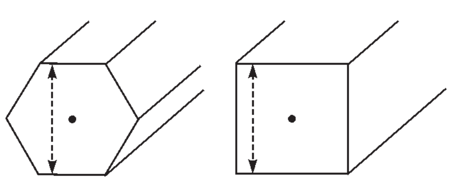


Рис. 2

Рассмотрим траекторию какой-нибудь точки на оси (грифеле) карандаша. а) Для какого из карандашей длина этой траектории больше? б) Во сколько (примерно) раз?

5. Три лыжника бегут с постоянными скоростями. Через каждый километр стоят судьи и отмечают, когда мимо них пробегают. Первый судья отметил моменты 12:01, 12:03, 12:07. Второй судья (через километр) отметил 12:08, 12:10, 12:11, третий (еще через километр) отметил 12:13, 12:15, 12:19. Какие моменты отметил четвертый судья (еще через километр)? Укажите все возможные варианты.

6. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы равны. Известно, что $AB = 2$, $CD = 5$, $DE = 7$, $EF = 1$. Найдите BC и AF.

7. Найдите все x, для которых

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]=2007\,.$$

(Здесь квадратными скобками обозначена целая часть числа, т.е наибольшее целое число, не превосходящее данного; например, $[6/5] = 1$.)

8. На столе лежали 30 монет решками вверх. Витя подошел к столу и перевернул 25 монет. После этого Саша подошел к столу и перевернул 24 монеты (при этом он мог переворачивать как те, что переворачивал Витя, так и другие). Каким может быть число монет, оказавшихся после этого решкой вверх? Укажите все варианты.

9. а) Нарисуйте, где может находиться центр круга радиуса 1, если известно, что круг пересекается (имеет хотя бы одну общую точку) с границей прямоугольника 3×4. б) Найдите площадь фигуры, образованной центрами таких кругов.

10. а) Как разместить гири массами 101 г, 201 г, 301 г, 401 г, 501 г и 601 г на чашечных весах так, чтобы разница масс на чашках была наименьшей возможной? Обоснуйте ваш ответ. б) Тот же вопрос, если добавить еще гирю в 701 г.

11. Два лыжника стартовали с интервалом в две минуты. Второй лыжник догнал первого у отметки 1 км (считая от точки старта). Дойдя до отметки 5 км, второй лыжник повернул обратно и через некоторое время встретился с первым лыжником. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого лыжника. Найдите скорость первого лыжника. (Скорости лыжников постоянны.)

12. Для выбора победителя 768 участников лотереи были расставлены по кругу. Сначала из круга вышел И.И.Иванов, затем вышел человек, который стоял через одного от Иванова по часовой стрелке и т.д. – каждый раз выходил стоящий через одного по часовой стрелке от выведенного перед этим. Так делали, пока не остался один человек – его объявили победителем. Где он стоял сначала (считая от Иванова по часовой стрелке)?

13. Вася убедил учительницу повысить ему оценку за итоговую контрольную в первой четверти с двойки на тройку, и его средний балл за первую четверть увеличился на a. После того, как он проделал то же самое во второй четверти, его средний балл за вторую четверть увеличился на b. На сколько увеличился в результате его средний балл за первое полугодие? (Средний балл – среднее арифметическое оценок.)

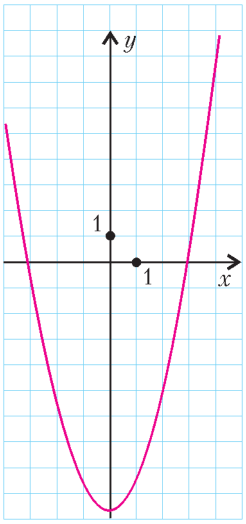


Рис. 3

14. В строчку выписаны единицы, двойки и тройки, причем есть ровно 17 единиц, за которыми следуют двойки, и ровно 23 двойки, за которыми следуют единицы. Какое наименьшее число троек может быть в этой строчке?

15. На клетчатой бумаге нарисовали график функции $y = x^2 + cx + d$ (рис. 3). Найдите c и d с абсолютной погрешностью не более 1.

16. Три колодца – вершины равностороннего треугольника со стороной 20. Нарисуйте все точки, для которых а) расстояние до ближайшего колодца равно 11; б) расстояние до самого далекого колодца равно 20.

17. Пешеход идет вдоль шоссе с постоянной скоростью. Каждые 6 минут он видит попутный автобус, а каждые 3 минуты – встречный. Известно, что автобусы едут в обе стороны с одной и той же скоростью и отправляются с конечных пунктов через одинаковые промежутки времени. Чему равны эти промежутки?

18. В клетчатом квадрате 100×100 нужно закрасить несколько клеток так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было не более двух закрашенных клеток.

а) Какое наибольшее число клеток можно закрасить?

б) Какое наименьшее число клеток можно закрасить так, чтобы ни одной нельзя было добавить по имеющимся правилам?

19. Сколько точек пересечения может иметь окружность с границей треугольника?

20. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов в 7 часов 38 минут?

21. Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить неравнобедренный непрямоугольный треугольник.

22. В бутылке было некоторое количество девятипроцентного раствора уксуса. Туда добавили стакан воды, в результате чего раствор стал шестипроцентным. Каким будет процентное содержание уксуса, когда добавят еще стакан воды?

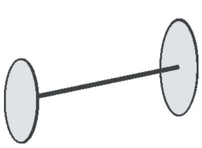


Рис. 4

23. Ось от детской машинки (диаметр левого колеса 20 мм, правого – 21 мм, расстояние между колесами 90 мм; рис.4) покатили по ровному полу. Поскольку колеса разные, ось заворачивает по кругу; при этом колеса оставляют на полу следы, являющиеся концентрическими окружностями. Найдите радиусы этих окружностей.

24. В последовательности 1, 10, 101, 10110, … каждое следующее число получается из предыдущего по такому правилу: 0 заменяют на 1, а 1 – на 10. Могут ли в одном из чисел в этой последовательности появиться три единицы подряд?

25. Рассмотрим первое число в последовательности из предыдущей задачи, в котором не меньше тысячи цифр. Какие цифры стоят в этом числе на 998-м, 999-м и 1000-м от начала местах?

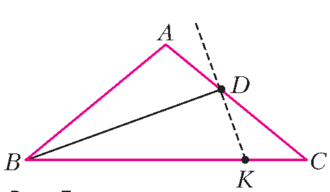


Рис. 5

26. В равнобедренном треугольнике ABC (BC – основание) проведена биссектриса BD (рис.5). Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно BD, пересекает основание BC в точке K. Докажите, что $BK = 2CD$.

27. Докажите, что ни одну из степеней двойки 1, 2, 4, 8,… нельзя представить в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

28. Докажите, что любое число, не являющееся степенью двойки, можно представить в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел.

29. Можно ли поместить прямоугольник 3×8 внутрь прямоугольника 5×6?

30. Есть по одному литру пятипроцентного, семипроцентного и десятипроцентного раствора уксуса. Какое максимальное количество восьмипроцентного раствора можно получить, смешивая эти растворы?

31. Целое число является точным квадратом и не оканчивается нулем. Если зачеркнуть две его последние цифры, тоже получается точный квадрат. Найдите наибольшее такое число.

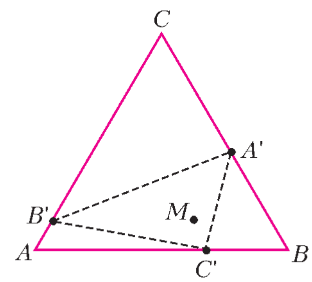


Рис. 6

32. Внутри равностороннего треугольника ABC взята точка M (рис.6). Докажите, что можно вписать в треугольник ABC треугольник $A'B'C'$, стороны которого равны MA, MB и MC.

33. Вася написал на доске 100 различных целых положительных чисел, а Петя нашел их всевозможные попарные суммы (включая сумму каждого числа с собой). Среди полученных сумм оказалось ровно 199 различных чисел. Какие числа были выписаны Васей, если известно, что среди них были числа 1 и 3, но не было числа 2?

34. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, причем их точка пересечения H лежит внутри треугольника (рис.7). Известно, что $AH = HA_1$, $CH = 2HC_1$. Найдите $\angle B$.

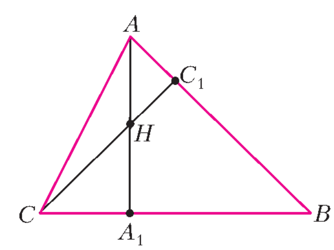


Рис. 7

35. В строчку выписаны 100 чисел. Докажите, что либо можно раскрасить их в четыре цвета так, чтобы числа каждого цвета возрастали слева направо, либо среди них можно выбрать пять чисел, которые убывают слева направо (наибольшее левее всех, следующее по величине правее его и т.д.).

36. Какое наибольшее число диагоналей выпуклого 239-угольника можно выбрать, если требуется, чтобы любые две из выбранных диагоналей имели общую точку (возможно, вершину)?

37. На плоскости нарисованы несколько точек, некоторые из которых соединены отрезками. Докажите, что можно раскрасить точки в два цвета так, чтобы не менее половины отрезков имели разноцветные концы.

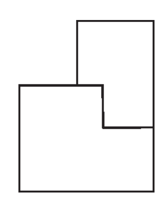


Рис. 8

38. Шестиугольник разрезан на два шестиугольника той же формы, но пропорционально меньших (рис.8). Длина его верхней стороны равна 1. Найдите длины остальных сторон.

Публикацию подготовили
Р.Гордин, В.Доценко, А.Шень, К.Шрамов