ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 3)

1. 7 пеньков.
2. Нитка пакетика закручена при изготовлении, так что немного вращаться будет даже сухой пакетик. Но пакетик очень легкий, и нить не может раскрутиться полностью. После намокания пакетик становится тяжелее, нить натягивается сильнее и раскручивается дальше.
3. При первом взвешивании положим на каждую чашу весов по две бронзовых и по одной серебряной медали.
Если весы в равновесии, то эти шесть медалей настоящие, а фальшивая находится среди оставшихся: бронзовой, серебряной и золотой. Чтобы найти ее, на одну чашу весов положим настоящую бронзовую и еще не проверенную серебряную медали, а на другую – не проверенную бронзовую и настоящую серебряную. Если весы снова в равновесии, то понятно, что фальшивая медаль – золотая. Если же одна чашка легче другой, то на ней лежат настоящая и фальшивая медали, и последняя определена.
Рассмотрим случай, когда при первом взвешивании одна чаша оказалась легче другой. Тогда фальшивая монета лежит на чаше, которая легче. Взвесим две бронзовые медали с этой чаши: если они одного веса, то фальшивая медаль – серебряная, если они разного веса, то более легкая фальшивая.
4. За 8 вечеров.
Ясно, что из двух хоббитов хотя бы один побывает в гостях у другого, если они не будут вести себя одинаково, т.е. сидеть дома в одни и те же вечера и гулять в одни и те же вечера. Если всего n вечеров, то имеется 2^n вариантов поведения (в каждый из n вечеров нужно выбрать из двух возможностей: гулять или не гулять). Значит, требуется найти наименьшее n, для которого выполнится неравенство $2^n > 250$.
5. $BC = 6$, $AF = 10$.
Сумма углов шестиугольника равна 720°. Так как все углы шестиугольника $ABCDEF$ одинаковы, каждый из них равен 120°. Значит, смежные с ними углы равны по 60°. Пусть прямые AF и BC пересекаются в точке K, прямые BC и DE – в точке L, прямые DE и AF – в точке M. Тогда треугольники KAB, CLD, FEM и KLM – равносторонние. Отсюда получаем $2 + BC + 5 = 5 + 7 + 1 = 1 + AF + 2$ и находим BC и AF.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №1 за 2009 г.)

16. Нет, нельзя. Пусть мы придумали такую разметку. Посчитаем, сколько клеток отмечены. Всего на кубике есть $3 \cdot 3 = 9$ колец, на каждом кольце отмечены 5 клеток, а через каждую клетку проходят ровно два кольца. Значит, всего отмечено $9 \cdot 5/2$ – нецелое число клеток. Противоречие.
17. Нет, не может. Пусть $Ц$ – площадь центральной части, $Ч$ – сумма площадей «четырехугольных» частей, T – сумма площадей «треугольных» частей, кроме центральной, $П$ – площадь всего парка. Если бы описанная ситуация была возможна, то сумма всех «четырехугольных» частей была бы больше суммы всех прилегающих к сторонам парка «треугольных» частей, т.е. $Ч > T$.
Из двух равных по площади половинок, на которые цветная линия разбивает большой треугольник, ровно одна всегда содержит центральную часть. Сумма площадей таких половинок равна $1{,}5П = 3Ц + 2Ч + T$. А сумма площадей оставшихся половинок равна $1{,}5П = 2T + Ч$. Приравнивая правые части, получим $T = Ч + 3Ц > Ч$. Противоречие.
18. Да, можно. Каждая «лесенка» состоит из шести квадратов. Поэтому достаточно научиться составлять квадрат. Из двух «лесенок» складываем прямоугольник 3×4, а из двенадцати таких прямоугольников – квадрат.
19. Пронумеруем все бутылки от 1 до 1000 и напишем на каждой ее номер в двоичной системе счисления; для номеров, меньших 512, допишем слева нули так, чтобы всего на каждой бутылке были написаны десять цифр. Также присвоим каждой мыши номер от 1 до 10 и дадим k-й мыши смесь вина из тех бутылок, на которых k-я цифра – единица. Когда пройдут десять минут, выпишем десять цифр – единицу на k-м месте, если k-я мышь изменила цвет, иначе – ноль. Полученная двоичная запись будет номером испорченной бутылки.
20. Разделим данное равенство на ab и перепишем его в виде $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3 - \frac{1}{ab}$. Таким образом, достаточно доказать неравенство $3 - \frac{1}{ab} \geq 2$. Оно равносильно неравенству $ab \geq 1$, поэтому будем доказывать его. Среднее арифметическое чисел a и b не меньше их среднего геометрического $\sqrt{ab}$, которое мы обозначим t. Тогда из равенства $a + b + 1 = 3ab$ получаем, что $2t + 1 \leq 3t^2$. Значит, $0 \leq 3t^2 - 2t - 1 = (t-1)(3t+1)$. Поскольку $t > 0$, произведение неотрицательно, когда оба множителя неотрицательны, т.е. когда $t \geq 1$, откуда $ab = t^2 \geq 1$.

XXX ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1. Пусть с одной стороны от проведенной прямой находится k вершин 2009-угольника. Тогда с другой стороны от нее находятся $2009 - k$ вершин. Прямая пересекает в точности те диагонали, которые соединяют вершины, находящиеся по разные стороны от нее. Вместе с двумя пересеченными нашей прямой сторонами 2009-угольника (которые на четность не влияют) таких диагоналей будет $k(2009 - k)$. Поскольку один из этих сомножителей обязательно четен, четно и их произведение.
3. 50.
Понятно, что надо иметь не меньше чем по 30 единиц, 30 двоек, …, 30 девяток и не меньше 29 нулей. Поскольку у кубика 6 граней, и $30 \cdot 9 + 29 = 299 > 49 \cdot 6$, нельзя обойтись меньше чем 50 кубиками. Покажем, что 50 кубиков хватит. Расположим в ряд 50 кубиков и начнем последовательно заполнять их грани (сначала – у первого кубика, потом – у второго, и т.д.) числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, … (именно в таком порядке). В результате каждая цифра будет написана на гранях 30 разных кубиков, и мы сможем составить любое 30-значное число, последовательно выбирая кубики с нужными цифрами.
4. Да, могла. Например, годится число 988888888890.

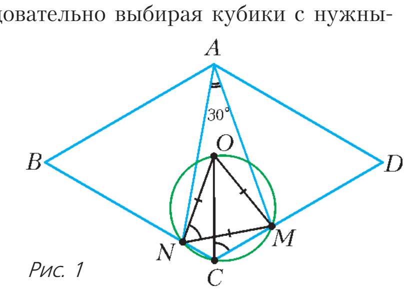

Рис. 1

5. Пусть O – центр описанной окружности треугольника NAM (рис.1). Поскольку угол NAM вписан в эту окружность и равен 30°, соответствующий ему центральный угол NOM равен 60°. Тогда равнобедренный треугольник MON – равносторонний, а четырехугольник $MCNO$ вписан в окружность (в нем сумма противоположных углов C и O равна 180°). Но углы MCO и MNO опираются на одну и ту же дугу этой окружности, откуда $\angle MCO = \angle MNO = 60°$, т.е. CO – биссектриса угла C ромба, и значит, O лежит на диагонали AC.

10–11 классы

3. а) По построению x_n при $n \geq 3$ нечетно. Поэтому при $n \geq 5$ сумма $x_{n-1} + x_{n-2}$ четна, откуда

$$x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2}) \leq (x_{n-1} + x_{n-2})/2 \leq \max\{x_{n-1}, x_{n-2}\},$$

причем равенство возможно только при $x_{n-1} = x_{n-2}$. Но в последнем случае $x_n = x_{n-1} = x_{n-2}$, и далее все члены последовательности будут такими же, как эти три. Допустим, $x_n < \max\{x_{n-1}, x_{n-2}\}$ при всех $n \geq 5$. Тогда $\max\{x_n, x_{n+1}\} < \max\{\max\{x_{n-1}, x_{n-2}\}, \max\{x_n, x_{n-1}\}\} = \max\{x_{n-1}, x_{n-2}\}$ при всех $n \geq 5$. Но величина $\max\{x_n, x_{n+1}\}$, принимающая натуральные значения, не может бесконечно убывать.

б) Это число $O(\text{НОД}(a,b))$.

4. Заметим, что если стереть пару идущих подряд единиц, разность $M - N$ не изменится: четность расстояний от этих единиц до каждого из нулей всегда будет различной, и поэтому стирание двух единиц уменьшит M и N на одно и то же число. Аналогично, не меняет разности $M - N$ стирание пары идущих подряд нулей. Будем стирать такие пары, пока это возможно. В итоге либо цифр не останется совсем (и тогда $M - N = 0$, что нас устраивает), либо останутся чередующиеся нули и единицы. Но в этом случае между любыми двумя единицей и нулем – четное число знаков, т.е. $M > N = 0$.

5. Как известно, отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней, пересекаются в одной точке (обозначим ее S) и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины. Продолжим отрезок XS на расстояние $SY = 3XS$ за точку S. Тогда треугольники SAY и SA_1X, где A_1 – точка пересечения медиан грани BCD, гомотетичны с центром S и коэффициентом –3. Следовательно, AY и XA_1 параллельны. Таким образом, все описанные в условии прямые пересекаются в точке Y.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Да, сможет. Васе достаточно называть все время одно и то же число: $1/(2008 \cdot 2009)$.

2. *а*) Примеры таких многоугольников приведены на рисунках 2 и 3.

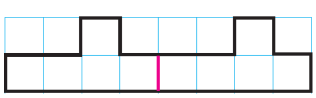

Рис. 2

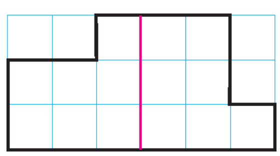

Рис. 3

б) Да. Примером может служить трапеция с отношением оснований 1:2, изображенная на рисунке 4. Она получается разрезанием квадрата по прямой, проходящей через его центр.

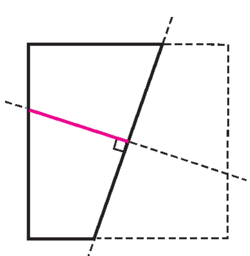

Рис. 4

3. Нет, нельзя.

Достаточно для любой расстановки знаков доказать, что, выезжая из дома, машина может выехать за границу квадрата (подумайте, почему). Пусть машина выезжает из центральной клетки на север. В каждой следующей клетке она сможет ехать на север или на запад, никогда не двигаясь на юг и на восток. Тогда не позднее чем через 101 шаг она заведомо выйдет за границы квадрата.

4. Нет, не обязательно.

Пример – последовательность: 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, … …, $k^2, k(k+1), (k+1)^2, (k+1)(k+2), (k+2)^2, \ldots$

6. Отразим точку B относительно прямой AC; пусть при этом отражении она переходит в точку B_1 (рис.5). Продлим BP и BQ до пересечения с AB_1 и CB_1 в точках M_1 и N_1. Тогда треугольники AMP и AM_1P, а также CNQ и CN_1Q равны, и сумма площадей треугольников AM_1P, CN_1Q и пятиугольника $M_1PQN_1B_1$ равна половине площади ромба $ABCB_1$.

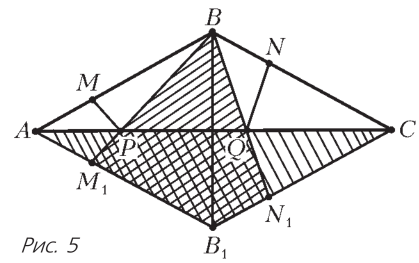

Рис. 5

Теперь заметим, что $\angle M_1BB_1 + \angle B_1BN_1 = 60° = \angle B_1BN_1 + \angle N_1BC$, а стало быть, треугольники M_1BB_1 и N_1BC равны по стороне ($BB_1 = BC$) и двум прилежащим к ней углам. Поскольку площадь треугольника B_1BC равна половине площади ромба $ABCB_1$, то и площадь четырехугольника $M_1BN_1B_1$ равна половине площади ромба $ABCB_1$. Стало быть,

$$S_{AM_1P} + S_{M_1PQN_1B_1} + S_{CN_1Q} = S_{PQB} + S_{M_1PQN_1B_1},$$

поэтому площадь треугольника PQB равна сумме площадей треугольников AM_1P и CN_1Q, а значит, и сумме площадей треугольников AMP и CNQ.

10–11 классы

1. Нет.

Пусть два прямоугольника имеют соприкасающиеся стороны (скажем, вертикальные). Рассмотрим проекции центров на прямую l, содержащую эти стороны. Если обе проекции лежат на общем участке соприкасающихся сторон, то отрезок I, соединяющий центры прямоугольников, не выходит за границы объединения этих прямоугольников (поскольку тогда точка пересечения отрезка I с прямой l, расположенная между проекциями, тоже лежит на этом участке; рис.6,*а*).

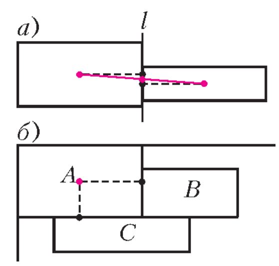

Рис. 6

Осталось найти такие два соприкасающихся прямоугольника. Рассмотрим прямоугольник A в левом верхнем углу. Пусть B и C – соседние с ним прямоугольники, причем B содержит середину правой стороны A, а C содержит середину нижней стороны A. Так как B и C не перекрываются, то не может одновременно нижняя сторона B располагаться ниже нижней стороны A, и правая сторона C располагаться правее правой стороны A. Пусть, например, нижняя сторона B расположена не ниже нижней стороны A (рис. 6,*б*). Тогда A и B – искомые прямоугольники.

3. 90. *Указание.* Число диагоналей, на которых стоит по нечетному числу фишек, не может уменьшиться.

Пример, когда можно снять 90 фишек, приведен на рисунке 7 (в каждой клетке поставлен номер шага, на котором снимается соответствующая фишка).

●	83	84	85	86	87	88	89	90	●
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
●	65	66	67	68	69	70	71	72	●
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
●	47	48	49	50	51	52	53	54	●
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
●	29	30	31	32	33	34	35	36	●
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
●	11	12	13	14	15	16	17	18	●
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Рис. 7

6. Второй игрок всегда может обеспечить себе победу.

Указание. Нарисуем вписанный в данную окружность правильный n-угольник, одна из вершин которого – точка, отмеченная первым игроком на первом ходу. Пока не все вершины этого n-угольника отмечены, второй игрок должен ставить синие точки в его вершины. Когда все вершины этого n-угольника будут отмечены, окружность разобьется на n дуг. Назовем дугу *красной*, если оба ее конца красные. Далее второй игрок должен отметить хотя бы по одной точке внутри каждой из красных дуг. Последним ходом он сможет выиграть.

Устный тур для 11 класса

1. $\frac{3}{2}100!$.

2. Пусть ладья попала на клетку h1 с клетки h2. Посмотрим, в каком порядке обходятся углы доски. Противоположные углы доски не могут идти подряд в маршруте ладьи – тогда соединяющий их путь отделяет один из двух других противоположных углов, и в этот угол ладья попасть не может. Значит, углы обходятся либо против часовой стрелки, либо по часовой стрелке. Случаи аналогичны, разберем первый. Достаточно разобрать варианты, когда первый угол в пути левый. Если первым проходится левый верхний угол, то путь, соединяющий первые три угла, отрезает последний угол – ладья не может в него попасть. Если первым проходится левый нижний угол, то уже пройдя следующий угол, мы оказываемся отрезанными от остальных углов. Значит, на клетку h1 ладья могла попасть только с клетки g1.

3. Обозначим сумму $f_1(n)+f_3(n)+\ldots$ через $O(n)$, а сумму $f_2(n)+f_4(n)+\ldots$ через $E(n)$. Докажем индукцией по n, что $|O(n)-E(n)|=1$. Для $n = 1$ это равенство справедливо. Пусть оно верно для некоторого количества цветов n. Заметим, что $f_k(n+1)=kf_k(n)+kf_{k-1}(n)$ при $1 < k < n + 1$, поскольку добавив число $n + 1$, мы можем покрасить его в один из имеющихся k цветов, если остальные числа уже раскрашены в k цветов, либо, если остальные числа раскрашены в k – 1 цвет, покрасить его в оставшийся из k первых цветов. Заметим также, что $f_{n+1}(n+1)=(n+1)f_n(n)$ и $f_1(n+1)=f_1(n)$. Тогда

$$O(n+1)=f_1(n)+3\left(f_3(n)+f_2(n)\right)+5\left(f_5(n)+f_4(n)\right)+\ldots,$$

$$E(n+1)=2\left(f_2(n)+f_1(n)\right)+4\left(f_4(n)+f_3(n)\right)+\ldots$$

Вычитая одно выражение из другого и производя сокращения, получим, что $O(n+1)-E(n+1)=E(n)-O(n)$, откуда следует утверждение задачи для $n + 1$ цветов.

Для знатоков. Как ни удивительно, у этой задачи имеется и геометрическое решение. Дело в том, что справедливо утверждение: для фиксированного n числа $f_k(n)$ суть количества $(n-k)$-мерных граней у некоторого $(n-1)$-мерного многогранника – *пермутаэдра*. Такой многогранник можно получить, взяв в n-мерном пространстве выпуклую оболочку $n!$ точек, координаты которых – числа от 1 до n в каком-либо порядке. Например, для $n = 2$ пермутаэдр – просто отрезок на плоскости (с концами $(1;2)$ и $(2;1)$), для $n = 3$ пермутаэдр – шестиугольник в пространстве (все шесть точек, полученные из $(1;2;3)$ перестановками координат, включая саму эту точку, лежат в одной плоскости $x + y + z = 6$). Количество вершин пермутаэдра равно $n!$, т.е. совпадает с $f_n(n)$. (*Указание*. Попробуйте для начала построить взаимно однозначное соответствие между ребрами пермутаэдра и раскрасками множества $\{1,\ldots,n\}$ в n – 1 цвет.)

Если воспользоваться приведенным выше утверждением, для решения задачи достаточно будет доказать, что знакопеременная сумма количеств k-мерных граней $(n-1)$-мерного пермутаэдра (где k меняется от 0 до n – 1) равна 1. Это гарантирует формула Эйлера: такая сумма равна 1 вообще для любого выпуклого (многомерного) многогранника. Например, для трехмерных многогранников формула Эйлера превращается в известное равенство, которое не раз обсуждалось на страницах «Кванта»: $V - E + F - 1 = 1$, где V, E и F – числа вершин, ребер и граней многогранника, а слагаемое «–1» соответствует его внутренности. Равенство количеств вершин и ребер многоугольника – тоже частный случай это формулы.

4. Лемма. *Существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра, быть может, кроме CD, если и только если AC + + BD = AD + BC.*

Пусть искомая сфера существует. Тогда вписанные окружности треугольников ABC и ABD касаются в точке касания данной сферы с ребром AB. Наоборот, если вписанные окружности треугольников ABC и ABD имеют общую точку (а значит, касаются), то содержащая их сфера – искомая. Пусть M_1 и M_2 – точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ABD с ребром AB. По формуле для длин отрезков, на которые разбиваются стороны треугольника точками касания вписанной окружности, $AM_1=\frac{AB+AC-BC}{2}$ и $AM_2=$ $=\frac{AB+AD-BD}{2}$. Касание вписанных окружностей эквивалентно тому, что $AM_1=AM_2$, а это равносильно равенству $AC + BD = AD + BC$.

Вернемся к решению задачи. Так как существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра, кроме CD, то по лемме AC + + $BD = AD + BC$. И по той же лемме, примененной к ребру AB, получаем искомую сферу. Осталось доказать, что полученная сфера не касается всех ребер тетраэдра. Предположим противное. Тогда она бы пересекала плоскости ABC и ABD по вписанным окружностям соответствующих треугольников, т.е. имела бы две общие окружности со сферой, данной в условии, а значит, совпадала бы с ней.

5. Пусть $P(x)=a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0$. Приведя дроби $a_m,\ldots,a_1,a_0$ к общему знаменателю t, запишем $P(x)$ в виде $\frac{1}{t}\left(b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0\right)$, где числа $t, b_m, \ldots, b_0$ – целые. Возьмем x равным достаточно большому простому числу p. Тогда

$$P\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{b_m+pb_{m-1}+\ldots+p^mb_0}{t\cdot p^m}.$$

Если $p>|b_m|$, то числитель полученной дроби взаимно прост с p^m. С другой стороны, если хотя бы один из коэффициентов $b_{m-1},\ldots,b_0$ отличен от нуля и p достаточно велико, $\left|b_m+pb_{m-1}+\ldots+p^mb_0\right|>|t|$, откуда числитель нашей дроби не может полностью сократиться со знаменателем, и значит, число $P\left(\frac{1}{p}\right)$ не имеет вида $\frac{1}{k}$, что противоречит условию. Поэтому $b_{m-1}=\ldots=b_0=0$, и утверждение задачи доказано.

6. У параллелепипеда есть две квадратные грани со стороной 1 м – назовем их малыми. За первые три минуты каждый муравей находит малую грань: он идет по ребру до конца, потом по другому – и тогда он знает, какие ребра образуют малую грань. Далее второй бегает по своей малой грани против часовой стрелки, а первый с начала 4-й по конец 5-й минуты обходит два ребра своей малой грани по часовой стрелке. Либо он встретит второго, либо затем за 2 минуты перейдет на другую малую грань, и там, идя снова по часовой стрелке, не позднее чем через 1,5 минуты встретит второго. Итого будет потрачено максимум 8,5 минут.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ LXXII МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

1. В 2022 году.

2. Примеры таких разрезаний приведены на рисунке 8.

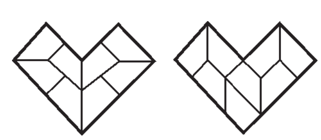

Рис. 8

3. В шесть раз.

4. Один из возможных маршрутов туриста изображен на

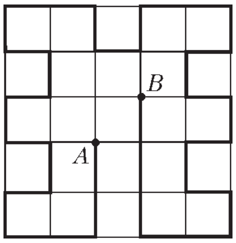

Рис. 9

рисунке 9. Докажите, что более длинный маршрут невозможен.

5. В шестом подъезде.

6. У зеленого осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.

7. Да, все монеты можно разложить поровну по всем сундукам. *Указание:* докажите, что общее число монет делится на 7 и делится на 11.

8. Один из возможных примеров показан на рисунке 10.

9. Пример: «В этом предложении 70% цифр делятся на 2, 60% цифр делятся на 3, а 40% цифр делятся и на 2, и на 3».

10. $\angle A = 36°$, $\angle B = 54°$.

Обозначим точку пересечения отрезков CK и AL за O (рис.11). Заметим, что CO – медиана к гипотенузе прямоугольного треугольника ACL. Значит, $AO = OC = OL$, а $\angle OCA = \angle OAC = \angle OAK$ (последнее равенство верно, так как AO – биссектриса). Обозначим этот угол за α. Тогда $\angle A = 2\alpha$. Найдем $\angle B$. Так как треугольник CBK равнобедренный, этот угол равен внешнему углу CKB треугольника CKA, т.е. $\angle B = \angle ACK + \angle KAC = 3\alpha$. Наконец, из того, что $\angle B + \angle A = 90°$, получаем, что $2\alpha + 3\alpha = 90°$. Значит, $\alpha = 18°$.

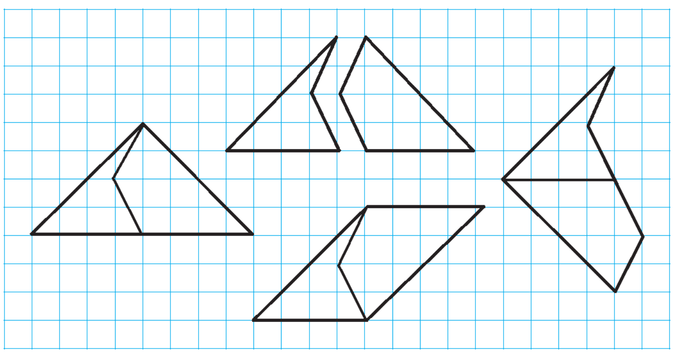

Рис. 10

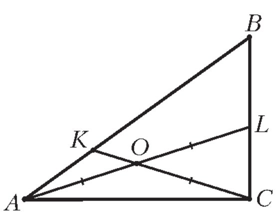

Рис. 11

11. 1.

Домножим первое уравнение на x и вычтем из него второе. Общий корень исходных уравнений будет и корнем получившегося уравнения

$$\left(ax^3 + bx^2 + cx\right) - \left(bx^2 + cx + a\right) = 0 \Leftrightarrow a\left(x^3 - 1\right) = 0 .$$

Но у последнего уравнения только один корень – а именно, 1.

12. Один из возможных примеров изображен на рисунке 12. В нем верхние два многоугольника совмещаются поворотом относительно точки A, нижние два – симметрией относительно точки O. Интересно, что многоугольниками такого вида можно замостить плоскость, причем непериодическим образом (см. например, обложку «Кванта» №2 за 1980 г.).

Рис. 12

13. Второй игрок может выиграть. *Указание.* Можно считать, что оба игрока пишут только числа 1, 10, 100, 1000 или 10000 (подумайте, почему). Докажите, что, отвечая на числа 10 и 1000 числом 1, а на числа 100 и 1 числом 10, второй игрок добьется успеха.

14. –1.

15. Нет, не существует.

Пусть при каком-то начальном расположении бусинок нашлась последовательность ходов, в результате которой какая-то бусинка прошла полный круг против часовой стрелки или больше. Обозначим начальное положение этой бусинки O. Тогда положения бусинок определяются углом от точки O с точностью до 2π, причем углы по часовой стрелке будем считать со знаком «–», а углы против часовой стрелки со знаком «+». Занумеруем бусинки по порядку. Обозначим за α_i угол до i-й бусинки. Тогда вначале имеем $-2\pi < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2009} = 0$. Заметим, что перемещению i-й бусинки соответствует замена α_i на $\frac{\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}}{2}$ при $i = 2, \ldots, 2008$, для первой бусинки имеем замену $\frac{\alpha_2 + \alpha_{2009} - 2\pi}{2}$, для 2009-й имеем $\frac{\alpha_1 + \alpha_{2008} + 2\pi}{2}$. То, что бусинка прошла полный круг или более, означает, что α_{2009} стал $\geq 2\pi$. Но вначале верно, что $\alpha_i < \frac{2\pi i}{2009}$, и при вышеуказанных преобразованиях это свойство сохраняется, поэтому α_{2009} всегда меньше 2π. Противоречие.

16. Опустим из B и A_1 высоты на AC в точки B_3 и B_4 соответственно, аналогично построим точки A_3 и A_4 (сделайте рисунок). Заметим, что $AB_1 = BA_1 = p - c$, где p – полупериметр треугольника ABC. Таким образом, $A_3A_4 = B_3B_4 = (p - c)\cos\gamma$. Отрезки A_3A_4 и B_3B_4 являются проекциями отрезка A_2B_2 на прямые AC и BC, но эти отрезки равны, поэтому отрезок A_2B_2 с ними составляет равные углы. Значит, он либо перпендикулярен биссектрисе угла C, либо параллелен ей. Обозначим ортоцентр треугольника ABC за H. Заметим, что так как B_1 лежит на отрезке AC, то A_4 лежит на отрезке A_3C, а значит, B_2 лежит на луче HB_3. Аналогично, A_2 лежит на луче HA_3. Значит, биссектриса угла A_3HB_3 пересекает отрезок A_2B_2. Но эта биссектриса параллельна биссектрисе угла ACB (так как в четырехугольнике HA_3CB_3 углы A_3 и B_3 прямые). Таким образом, получаем, что A_2B_2 не параллелен биссектрисе угла C, значит, он ей перпендикулярен.

17. Касательная к графику функции $y = \sin x$, где $x \in (0;\alpha)$, проведенная в заданной его точке $(x_0;\sin x_0)$, имеет угловой коэффициент $\cos x_0$, и для ее построения при помощи циркуля и линейки достаточно построить отрезок длины 1. Действительно, имея отрезки 1 и $\sin x_0$, можно построить отрезок $\cos x_0$ (при помощи тригонометрического круга), а значит, и угол, тангенс которого равен $\cos x_0$. Покажем, как построить отрезок длины 1 (т.е. восстановить масштаб).

а) Из точки $B = (a; \sin a)$, где $a \in \left(\frac{\pi}{2};\alpha\right)$, лежащей на графике функции, опустим перпендикуляр на ось Oy (рис. 13). Так как $\sin(\pi - a) = \sin a$, то этот перпендикуляр пересечет график функции $y = \sin x$ в точке $A = (\pi - a;\sin a)$. Через середину отрезка AB проведем прямую, перпендикулярную оси Ox. Она пересечет график в точке $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$. Отрезок этой прямой от оси Ox до графика функции $y = \sin x$ имеет длину 1.

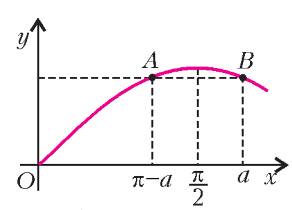

Рис. 13

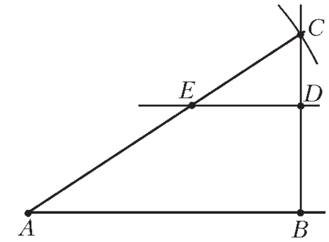

Рис. 14

б) Пусть a и b – произвольные точки на оси Ox, удовлетворяющие условию $0 < b < a < \alpha$. Построим отрезок AB длины $\sin a + \sin b$. Через точку B проведем луч l, перпендикулярный отрезку AB. Окружность с центром в точке A и радиусом $2\sin\frac{a+b}{2}$ пересекает луч l в точке C (рис. 14). Так как $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, то $\angle CAB = \frac{a-b}{2}$. На отрезке BC отметим точку D такую, что $BD = \sin\frac{a-b}{2}$. Через точку D проведем прямую, параллельную отрезку AB. Эта прямая пересечет отрезок AC в точке E. Длина отрезка AE равна 1, так как $\sin\angle CAB = \sin\frac{a-b}{2} = \frac{BD}{AE}$.

18. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник, O – центр вписанной в него окружности, прямые AO, CO – две из трех прямых, данных в условии.

а) Если точка O лежит на прямой AC, то эта прямая является осью симметрии четырехугольника $ABCD$, поэтому прямые BO и DO одновременно обладают указанным свойством. Рассмотрим случай, когда прямые AO и CO не совпадают и пересекают границу четырехугольника в точках P и Q соответственно (рис. 15). Из условия следует, что треугольники AOQ и COP равновелики, а так как их высоты, опущенные из вершины O, равны, то $AQ = CP$. Кроме того, $\angle AOQ = \angle COP$, поэтому $AO \cdot OQ = CO \cdot OP$ и, по теореме косинусов,

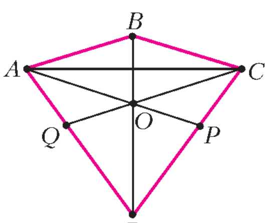

Рис. 15

$$AO^2 + OQ^2 - 2AO\cdot OQ\cos\angle AOQ = AO^2 =$$
$$= CP^2 = CO^2 + OP^2 - 2CO\cdot OP\cos\angle COP,$$

откуда $AO + OQ = CO + OP$. Поэтому либо $AO = OP$ и $OQ = CO$, либо $AO = OC$ и $OQ = OP$ (по теореме, обратной теореме Виета) и треугольники AOQ и COP равны. Первый случай невозможен (иначе $AD \parallel CD$, что неверно). Во втором случае четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD (докажите), откуда прямые BO и DO совпадают.

б) $72°$, $108°$, $72°$, $108°$ или $72°$, $72°$, $72°$, $144°$.

19. $p + 1$.

Если $(p^2)!$ кратно $(p!)^n$, $n \in \mathbb{N}$, то $n \le p+1$, так как p входит в разложение числа $p!$ на простые множители в степени 1 (а значит, в разложение числа $(p!)^n$ – в степени n), а в разложение числа $(p^2)!$ – в степени $p + 1$. Докажем, что $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$. Запишем p^2 различных элементов в виде таблицы $p \times p$. Две такие таблицы назовем эквивалентными, если одна получается из другой некоторыми перестановками элементов внутри строк, а также некоторой перестановкой самих строк (всего $p + 1$ перестановка p объектов). Всего таблиц $(p^2)!$, и они разбиваются на классы эквивалентных по $(p!)^{p+1}$ таблиц в каждом классе, поэтому $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$.

20. *Указание*. Расположим все «двузначные» числа внутри клеток решетки специального вида, как указано на рисунке 16. Тогда любые два числа, расположенные в соседних (граничащих по отрезку) квадратах, будут отличаться друг от друга на 1, 10 или 11. Докажите, что при любом разбиении чисел на две группы найдется путь, идущий по соседним клеткам, проходящий только по числам одной группы и соединяющий либо левый и правый, либо верхний и нижний края решетки.

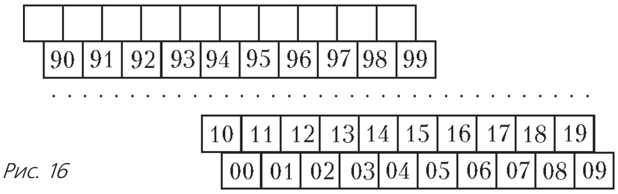

Рис. 16

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

7 класс

1. $t_{\min} = 48$ мин.

2. $m_1 = m_2 = m_3 = 2m_4 - m_0 = 1{,}7$ кг.

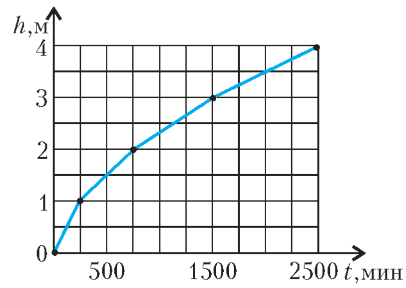

Рис. 17

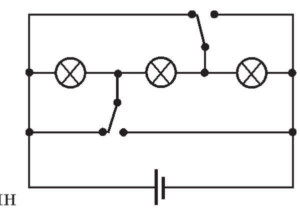
Рис. 18

3. См. рис.17; $t = 41$ ч 40 мин.

4. $\rho_{ст} = \frac{\rho_в M}{M + m - \rho_в V} = 2{,}5$ г/см^3; $\Delta h = \frac{M+m}{\rho_в \pi R^2} \approx 1{,}17$ см.

8 класс

1. 1) $v = n\pi(R - r)$; 2) $F = \frac{mg(R-r)}{4R}$. **2.** См. рис.18.

9 класс

1. $N_{\max} \approx 7{,}19$ Вт, при этом все резисторы соединены параллельно.

2. $L_{\max} = \sqrt{h^2 + L^2} = 1{,}5$ м.

10 класс

1. $a_{\max} = g\left(\frac{\mu L\cos\alpha}{2L - \mu h} - \sin\alpha\right)$ при условии $L > \mu h$.

2. $F = p_а S\left(1 - \frac{\rho_в T_0}{\rho_л T_к}\frac{\rho_л V - m}{\rho_в V - m}\right) \approx 32$ Н.

3. $\varphi = 0{,}8\varphi_0$ при удалении любой палочки, а $E = 0$, E_0, $\sqrt{3}E_0$ в зависимости от того, какую палочку удалить.

11 класс

1. В воде находится часть объема цилиндра $n = \frac{a}{h} - \frac{\rho_м - \rho}{\rho_в - \rho_м} = \frac{11}{21}$, а в масле – часть $1 - n = \frac{10}{21}$. Равновесие будет устойчивым, если $\rho_м \frac{R_2^2 - R_1^2 + r^2}{R_2^2 - R_1^2} > \rho_в \frac{R_1^2 - r^2}{R_1^2}$.

2. Вектор напряженности направлен по пространственной диагонали кубика от его положительно заряженного «угла» и равен $E = \frac{\sigma}{\sqrt{3}\varepsilon_0}$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. См. рис.19.

2. $m_3' = m_3 + \frac{m_3 - m_2}{m_2 - m_1}(m_1 - m_1') = 42$ г.

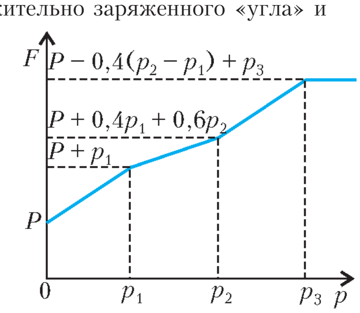

Рис. 19

9 класс

1. См. рис.20.

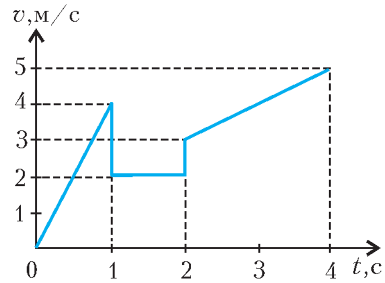

Рис. 20

2. Ускорение направлено вниз и равно

$$a_2 = g\frac{3m_1m_3 + 4m_1m_2 + m_2m_3}{m_1m_3 + 4m_1m_2 + m_2m_3} > g .$$

3. $x = \frac{\rho_1 h}{\rho_0}$ при $\rho_1 < \rho_0$; $h \le x \le H$ при $\rho_1 = \rho_0$;

$x = H + \sqrt{2hH\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right)}$ при $\rho_0 < \rho_1 \le \rho_2 = \rho_0\left(1 + \frac{h}{2H}\right)$;

$x = \frac{\rho_1 H}{\rho_0} + \frac{h}{2}$ при $\rho_2 < \rho_1 < \rho_3 = \rho_0\left(2 - \frac{h}{2H}\right)$;

$x = 2H$ при $\rho_1 > \rho_3$.

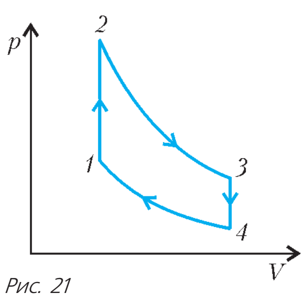

Рис. 21

10 класс

1. $t_1 = \frac{vs}{v^2 - u^2} = 2,25$ ч ;

$t_2 = \frac{s}{\sqrt{v^2 - u^2}} \approx 2,12$ ч .

2. См. рис.21; $\frac{T_{max}}{T_{min}} = 2$.

3. $q_2 \le q_1 n\sqrt{k}$.

11 класс

1. Мгновенные скорости крайних точек горизонтального диаметра диска равны $v_1 = v\sqrt{\frac{3 - \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}}$, наклонены к этому диаметру под углом $\beta = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2}{1 - \sin\alpha}}$ и лежат в плоскости, перпендикулярной мгновенной оси вращения диска. Эта ось проходит через точку касания диска с горизонтальной плоскостью и точку пересечения вертикальной оси конуса с главной осью симметрии диска, перпендикулярной его плоскости. В верхней половине диска есть целая область точек, движущихся с большей скоростью. В частности, это все точки верхней половины обода диска.

2. $v_{min} = \sqrt{2g(x_1 - h) + \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right)}$ при $\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2} > \frac{3\sqrt{3}}{2}mg$ и $x_1 \le h \le x_2$, $v_{min} = 0$ при $\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}mg$ для всех h и при $\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2} > \frac{3\sqrt{3}}{2}mg$ для $h < x_1$ и $h > x_2$; здесь x_1 – меньший из корней уравнения

$$\frac{x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 mg}{qQ}$$

и x_2 – больший из корней уравнения

$$mgx + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}} = mg\frac{R^2 + 2x_1^2}{x_1} .$$

3. $v_{max} = \frac{2}{3}v_0$, $x_{max} = v_0\sqrt{\frac{m}{6k}}$.

4. При $l < F$ решений нет; при $F \le l < R + F$ имеется одно решение: $d = \frac{Fl}{l - F}$; при $l \ge R + F$ имеются два решения: $d_1 = \frac{Fl}{l - F}$ и $d_2 = \frac{F(l - R)}{l - R - F}$.

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

1. Скорость и путь третьего жука равны нулю.

2. $\beta = 60°$. **3.** $A = \frac{k^2 l^3}{3F} + \frac{F^2}{6k}$.

4. $a = g\frac{\sqrt{3}}{4}$. **5.** $V = \frac{\pi H D^2}{8}$.

6. $A_{max} = \frac{3}{2}RT_1\left(1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right)^2$. **7.** $r_{min} = R\left(1 - \frac{1}{1 + q^2B^2R/(2mF)}\right)$.

8. Средняя объемная плотность энергии постоянна.

9. Интенсивность света уменьшится вдвое.

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Власов, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info
Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59