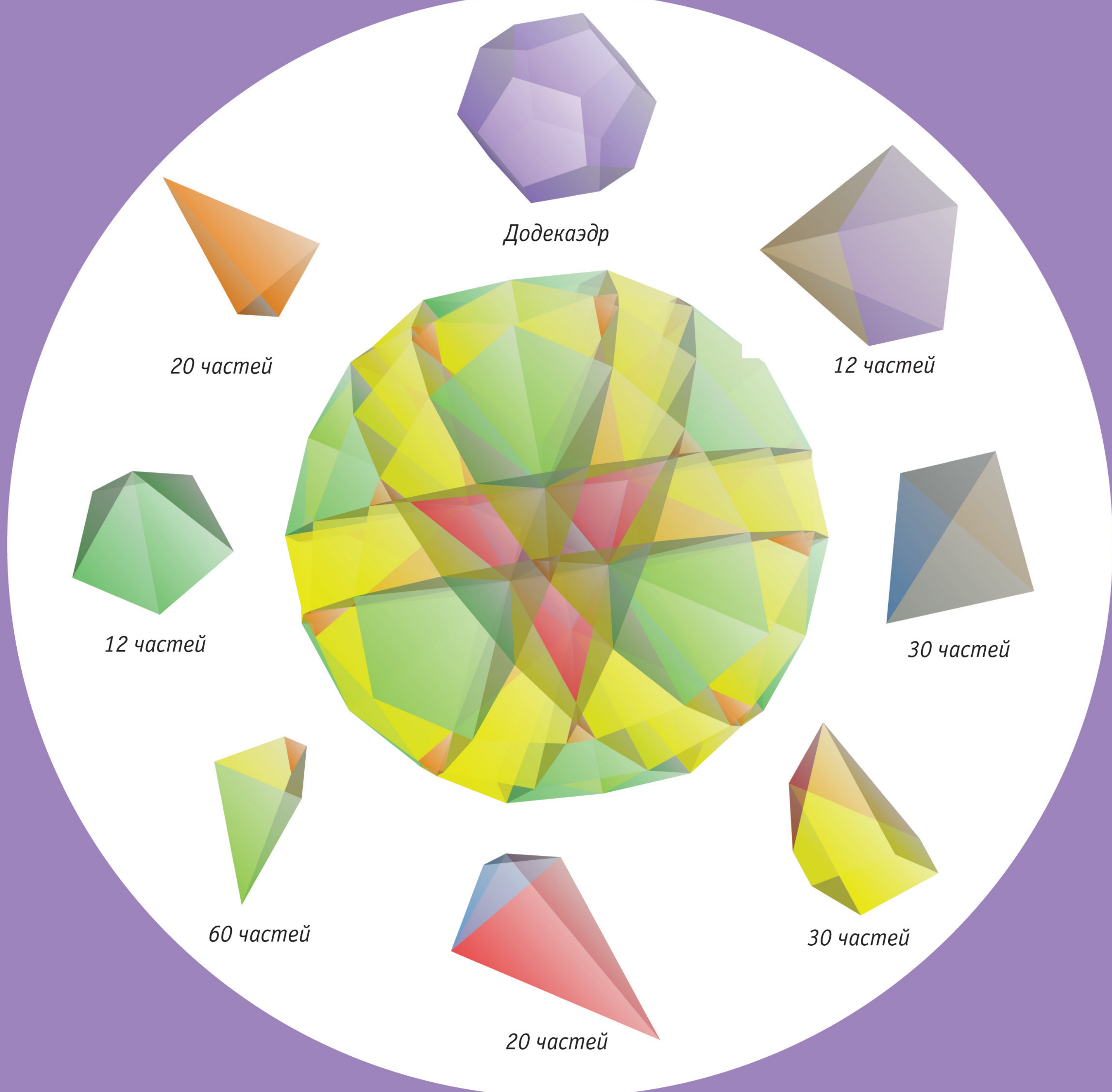
КВАНТЫ ИНТЕРНЕТА

НА СКОЛЬКО ЧАСТЕЙ ДЕЛЯТ ПОСТРАНСТВО ПЛОСКОСТИ ГРАНЕЙ ДОДЕКАЭДРА?



Одно из решений этой замечательной задачи демонстрирует мультфильм, созданный М.Пановым (см. www.math.ru/yurev/185.avi). Подсчет числа частей происходит на ваших глазах: грани додекаэдра медленно продолжаются, и можно наблюдать, как возникают новые части.
Здесь же приведены несколько кадров из мультфильма. На большом рисунке грани продлены так далеко, что уже появились все части. Рядом нарисовано по части каждого типа (некоторые из них — бесконечного размера и изображены не целиком) и указано, сколько всего образуется частей каждого типа. Одна из частей — сам додекаэдр.
Два других способа подсчета приведены на странице 19 внутри журнала.

ЗАДАЧА КИМА

Следующая задача – одна из самых популярных в занимательной математике. В середине XIX века ею занимался великий Карл Гаусс, и обычно она носит его имя.

Сколькими способами можно расставить на доске восемь ферзей, чтобы они не угрожали друг другу, т.е. никакие два не стояли на одной вертикали, горизонтали и диагонали?

Очевидно, больше восьми ферзей расставить невозможно, а найти то или иное решение несложно, одно из них представлено на рисунке 1. Гораздо

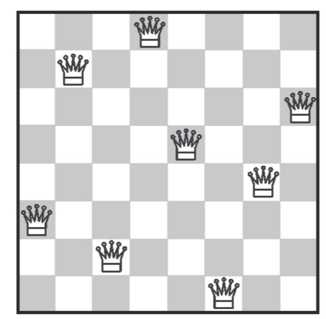
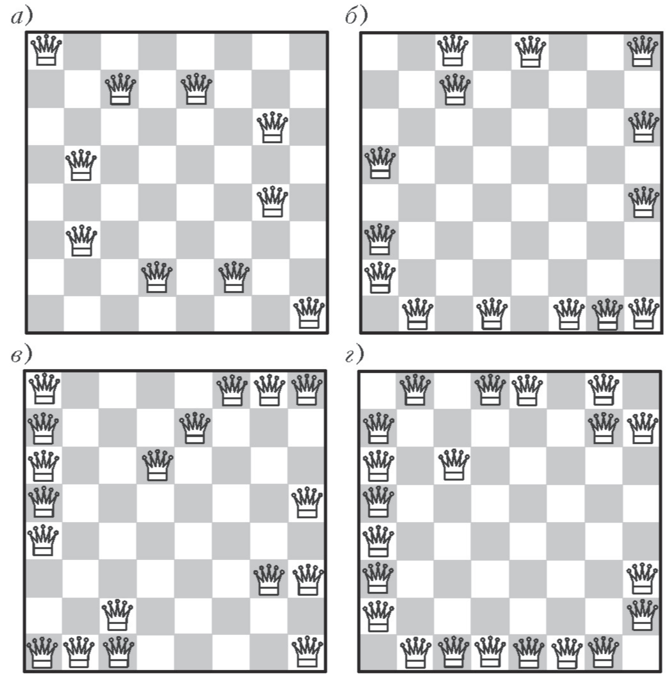


Рис. 1

труднее подсчитать общее число решений, в чем, собственно, и состоит задача. Любопытно, что многие авторы приписывают ее самому Гауссу. На самом деле задача была сформулирована в 1848 году немецким шахматистом М.Беццелем. Доктор Ф.Наук обнаружил 60 решений и опубликовал их спустя два года. Лишь после этого Гаусс заинтересовался задачей и нашел 72 решения, которые сообщил в письме к своему другу астроному Шумахеру. Полный же набор, состоящий из 92 расстановок, получил все тот же Наук в 1850 году. Среди них можно выделить (разными способами) 12 основных, которые не переходят друг в друга при поворотах и зеркальных отражениях доски, а любая другая расстановка возникает из какой-то основной при помощи этих преобразований. Вот один из наборов основных расстановок:

1) рис. 1;
2) a5, b3, c1, d7, e2, f8, g6, h4;
3) a4, b1, c5, d8, e6, f3, g7, h2;
4) a4, b2, c5, d8, e6, f1, g3, h7;
5) a4, b2, c7, d3, e6, f8, g1, h5;
6) a4, b2, c7, d3, e6, f8, g5, h1;
7) a3, b5, c2, d8, e6, f4, g7, h1;
8) a4, b1, c5, d8, e2, f7, g3, h6;
9) a4, b7, c3, d8, e2, f5, g1, h6;
10) a6, b4, c2, d8, e5, f7, g1, h3;
11) a4, b8, c1, d5, e7, f2, g6, h3;
12) a4, b2, c7, d5, e1, f8, g6, h3.

Остальные 80 получаются из этих 12 при помощи поворотов и отражений доски. Например, из первой расстановки (см. рис.1) при повороте доски по часовой стрелке на 90° возникает следующая расстановка: a3, b6, c8, d2, e4, f1, g7, h5, а при зеркальном отражении (относительно вертикальной линии, разделяющей фланги) – такая: a6, b4, c1, d5, e8, f2, g7, h3. Новые повороты и отражения дают еще пять расстановок, всего с учетом исходной – восемь.



а) б) в) г)

Рис. 2

Аналогично, другие основные расстановки порождают восемь решений, исключение – для второй, которая дает только одну при повороте и две при отражении, итого четыре.

Итак, всего имеем $11\times8+1\times4=92$ расстановки восьми ферзей, не угрожающих друг другу.

Существует множество обобщений задачи Гаусса. Самое распространенное из них – для доски $n\times n$. Доказано, что для любых n, кроме 2 и 3, на доске $n\times n$ можно расставить n не угрожающих друг другу ферзей, правда число решений в общем случае не известно.

Весьма интересное обобщение придумал американский математик С. Ким.

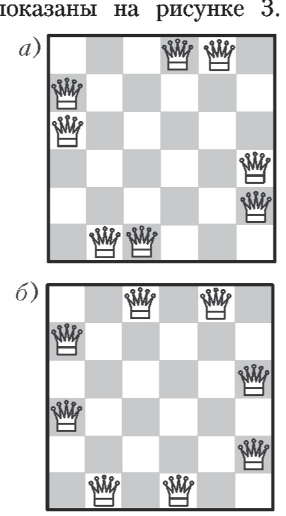
Расставить на доске наибольшее число ферзей, чтобы каждый из них нападал ровно на p других.

Условие $p=0$ означает, что ферзи не угрожают друг другу, т.е. мы приходим к классической задаче, искомое число равно восьми (см. рис.1). Для $p=1$ наибольшее число равно 10 (рис. 2,*а*). На доске уместилось пять «изолированных» пар ферзей, каждый из которых нападает только на ферзя своей пары. Для $p=2$ искомое число равно 14 (рис.2,*б*). Полное решение задачи обнаружили украинские математики С.Белый и Е.Ровенский. Они доказали, что для $p=3$ число ферзей равно 18 (рис.2,*в*), для $p=4$ оно равно 21 (рис.2,*г*), а для $p>4$ необходимых расстановок не существует.

С помощью компьютера Белый и Ровенский исследовали задачу для доски $n\times n$ при разных n и p. В результате они построили таблицу, где для всех $n\le8$ и возможных p указано наибольшее число ферзей, каждый из которых атакует ровно p других:

$n\setminus p$	0	1	2	3	4
1	1				
2	1	2	3	4	
3	2	2	4	6	
4	4	4	6	8	8
5	5	4	8	10	11
6	6	8	10	12	15
7	7	8	12	14	18
8	8	10	14	18	21

Столбец $p=0$, очевидно, получается из задачи о расстановке n ферзей на доске $n\times n$, строка $n=8$ $(1\le p\le4)$ проиллюстрирована на рисунке 2. Вот еще один случай: $n=6$, $p=1$; здесь имеются две основные расстановки наибольшего числа ферзей – восьми, обе показаны на рисунке 3. Число



а) б)

Рис. 3

необходимых расстановок найдено для всех элементов таблицы.

Е.Гик