

Красное небо, синяя луна

А. СТАСЕНКО

*Закат из золотого стал как медь,
Покрылись облака зеленой ржою...*

Н.Гумилев

НО – СИНЯЯ ЛУНА, КРАСНОЕ НЕБО – НЕУЖЕЛИ ТАКОЕ бывает?

– А вот и бывает. Однако, все по порядку...

Начнем с того, что знает каждый отличник: электромагнитная волна бежит со скоростью света, векторы электрического и магнитного полей, точнее векторы их напряженностей, в волне перпендикулярны друг другу и направлению ее распространения. Образно говоря, она дважды поперечна, в отличие от звуковой волны в газе, которая всего лишь единожды продольна.

Напряженность электрического поля E , как известно, измеряется в вольтах на метр: $[E] = \frac{В}{м}$. Скажем несколько

слов и о напряженности магнитного поля H . (Подчеркнем – именно о напряженности, а не об индукции B , которая, впрочем, строго пропорциональна H , по крайней мере в вакууме, но имеет другую размерность.) Представим себе провод с постоянным током силой I (рис.1). Согласно одному из законов электромагнетизма, вокруг этого провода существует магнитное поле, линии напряженности которого представляют собой окружности, соосные с током. Причем произведение напряженности H поля на длину $2\pi r$ любой окружности радиусом r как раз и равно силе тока:

$$H \cdot 2\pi r = I.$$

(Левую часть этого равенства физики называют циркуляцией вектора H по контуру, длина которого в рассматриваемом частном случае равна $2\pi r$.) Отсюда видна и размерность напряженности магнитного поля: $[H] = \frac{А}{м}$.

Разумно предположить, что если выделить только кусок длиной l этого бесконечного провода, то его вклад H_l в суммарную величину напряженности поля (по крайней мере, в меридиональной плоскости) будет пропорционален не только I , но и l . Произведение Il можно назвать элементом тока, его размерность $[Il] = А \cdot м$.

Далее, известно, что электромагнитное поле распространяется даже в вакууме (причем, свободнее всего) благодаря тому, что переменные (во времени) электрическое и магнитное поля порождают друг друга. Как тут не предположить, что напряженности этих полей связаны соотношением пропорциональности:

$$E \sim H. \quad (1)$$

А что если их перемножить? По крайней мере, любопытно узнать размерность произведения:

$$[EH] = \frac{В}{м} \cdot \frac{А}{м} = \frac{Вт}{м^2} = \frac{Дж}{с \cdot м^2}.$$

Но ведь это размерность плотности потока энергии P , т.е. энергии, протекающей в единицу времени через перпендикулярную площадку единичной площади. Эта плотность потока называется вектором Пойнтинга – по имени английского физика Джона Генри Пойнтинга, который ввел это понятие в 1884 году. Заметим, что для упругой волны аналогичное понятие еще раньше (1874 г.) было введено русским физиком Николаем Алексеевичем Умовым. Поэтому плотность потока энергии любой физической природы справедливо называют вектором Умова–Пойнтинга. Но здесь нас будет интересовать именно электромагнитное поле. Итак,

$$EH = P. \quad (2)$$

Однако постоянный ток не может породить электромагнитную волну. Для ее возникновения нужно, чтобы ток стал переменным, например синусоидальным с периодом T или частотой $\omega = 2\pi/T$:

$$I = I_m \sin \omega t.$$

Тогда магнитное поле будет пропорционально скорости (темпу) изменения тока со временем, или, как говорят умные люди, пропорционально первой производной тока по времени

$$I' = \omega I \sim \frac{I}{T}, \quad [I'] = \frac{А}{с}.$$

Тут, конечно, стоило бы поговорить о производной с математической точки зрения. Но нам достаточно того, что размерность этой величины должна содержать секунду в знаменателе, т.е. быть обратно пропорциональной периоду T изменения тока или прямо пропорциональной частоте этого изменения ω . Тогда получим

$$H_l \sim \frac{I'l}{r}. \quad (3)$$

Появление в знаменателе расстояния r от излучателя не случайно: оно есть результат закона сохранения потока энергии. Действительно, плотность потока энергии (2) должна убывать с расстоянием как $1/r^2$. А поскольку напряженности электрического и магнитного полей пропорциональны друг другу (1), то каждая из них пропорциональна $1/r$.

Теперь представим нужный нам переменный ток как результат колебательного движения вверх–вниз положительного электрического заряда q в пределах отрезка длиной l (рис.2). Когда этот заряд q находится в центре отрезка, его компенсирует неподвижный заряд противоположного знака; когда q смещается на расстояние x ($|x| < l$), возникает электрический диполь с моментом qx , хотя отрезок в целом остается электрически нейтральным. Но поскольку заряд движется со скоростью $v = x'$ (ведь скорость – это производная от расстояния по времени), его можно уподобить элементу тока

$$Il = qv = qx', \quad [qv] = \text{Кл} \frac{м}{с} = \frac{\text{Кл}}{с} м = А \cdot м,$$

причем $I'l = qv' = qx''$. Значит, выражение (3) можно пере-

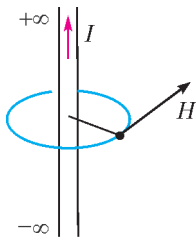


Рис. 1

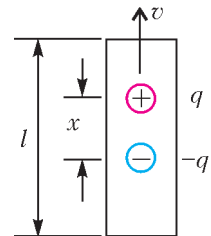


Рис. 2

писать в виде

$$H_l \sim \frac{l' l}{r} = \frac{q x''}{r} \sim \frac{q l \omega^2}{r}.$$

Понятно, что квадрат частоты возник от того, что мы дважды брали производную от смещения заряда $x = l \sin \omega t$. Теперь, вспомнив (1) и (2), получим плотность потока энергии:

$$P_l = E_l H_l \sim \left(\frac{q v'}{r} \right)^2 \sim q^2 l^2 \frac{\omega^4}{r^2}.$$

Тут уже есть, чем полюбоваться. Во-первых, векторы \vec{P}_l , \vec{E}_l , \vec{H}_l (рис.3) взаимно перпендикулярны и образуют

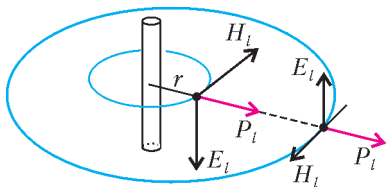


Рис. 3

правую тройку (как координаты x, y, z декартовой системы) – это, как упоминалось в самом начале, знает каждый отличник. Понятно, что вектор плотности потока энергии направлен по радиусу от излучающей «элементарной антенны длиной l », а его модуль убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от диполя (при $r \gg l$). Последнее наблюдение отражает закон сохранения энергии (уже использованный выше): ее полный поток зависит от площади $4\pi r^2$ сферы радиусом r , поэтому, суммируя плотности потока энергии по всем направлениям от диполя (а не только в меридиональной плоскости, как показано на рисунке 3), получим полный поток энергии:

$$W \sim q^2 l^2 \omega^4, [W] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}. \quad (4)$$

Рисунок 3 демонстрирует также, что через половину длины волны направления векторов электрического и магнитного полей изменяются на противоположные, в то время как вектор Пойнтинга всегда направлен по радиусу-вектору, проведенному из середины диполя.

Но вот что самое интересное: полный поток энергии W оказался пропорциональным четвертой степени частоты колебаний тока. Эта зависимость получена (1871 г.) замечательным английским физиком Джоном Уильямом Рэлеем, а само явление, описываемое выражением (4), назвали рэлеевским рассеянием. И это позволяет объяснить многие интересные факты.

Например, почему небо обычно голубое, хотя в солнечном спектре (который глаз воспринимает в диапазоне длин волн приблизительно от 0,4 до 0,75 микрон – от фиолетового до красного участков) присутствуют все цвета? Теперь мы можем объяснить это следующим образом. Атмосфера не совсем однородна: в ней в любой точке происходят так называемые флуктуации плотности – постоянно образуются и распадаются сгустки и разрежения. Относительная флуктуация концентрации молекул тем более вероятна, чем меньшее количество N молекул в ней участвует, так что $N = \langle N \rangle (1 \pm 1/\sqrt{\langle N \rangle})$, где $\langle N \rangle$ – среднее значение за достаточно большой промежуток времени. Световые волны, идущие от Солнца, воспринимают эти сгустки как частицы. А поскольку длина волны синего цвета меньше, чем красного, то, согласно, выражению (4), он и сильнее рассеивается. По этой же причине Солнце и Луна при закате и восходе часто кажутся красными: путь света в

атмосфере в скользких лучах становится большим, и все интенсивнее отсеивается во все стороны преимущественно голубая компонента.

Но рэлеевское рассеяние соответствует случаю очень мелких частиц, размеры которых a много меньше длины волны λ . А что если рассматривать более крупные частицы? Как показали исследования,

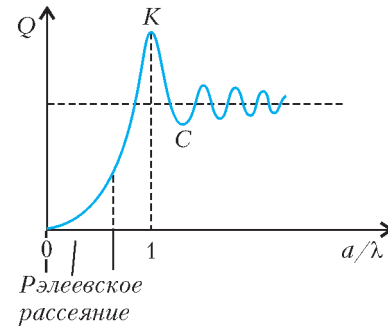


Рис. 4

при некоторых a наблюдаются максимальные значения так называемого коэффициента рассеяния Q . Зависимость этой оптической характеристики от произвольного значения отношения a/λ (рис.4) позволяет объяснить и кое-какие непривычные явления. Так, более полувека тому назад на боль-

шей части Европы Солнце и Луна казались голубыми из-за рассеяния их света на частицах, занесенных высотными ветрами из горящих лесов Канады (через Атлантику!). Значит, из лучей, идущих от этих небесных тел, отсеивались красная и желтая компоненты и оставалась преимущественно коротковолновая часть спектра. Этот факт можно объяснить, например, тем, что красному свету соответствовал максимум (точка K), а синему – минимум (точка C) на приведенной кривой рассеяния.

А еще раньше древние хроники – и римские, и китайские – сообщали о красном небе. Как оказалось, произошло извержение вулкана (186 г.) в Новой Зеландии, т.е. в южном полушарии, отделенном от северного не только экватором, но и муссонными и пассатными ветрами!

И уж совсем недавно (2004 г.) в популярной телевизионной передаче сообщалось, что Землю ждет не потепление, а *потемнение*: уже 20% солнечного излучения не доходит до ее поверхности, так как в атмосфере сажи оказалось вдвое больше, чем прогнозировали.

А что случится, если взорвутся все накопленные человечеством ядерные заряды? Тогда сгорят деревья, трава, плодородная почва... и в атмосферу поднимутся миллиарды тонн частиц пепла. Поскольку эти долгоживущие частицы будут размером много меньше 10 микрон (а именно на такой длине волны излучает Земля с температурой около 300 К), то излучение Земли будет уходить в космос – такие облака прозрачны для этого излучения. Между тем, для солнечного излучения с характерной длиной волны $\sim 0,5$ мкм размеры этих же частиц могут оказаться порядка длины волны и стать сильными рассеивателями, не допускающими солнечный свет к Земле. В результате Земля охладится, океаны замерзнут, станет холодно и темно – ни красного неба, ни синей луны, ни наоборот. Наступит так называемая ядерная зима, основные характеристики которой среди первых в мире теоретически предсказали советские ученые академик Н.Н.Моисеев и профессор В.В.Александров (кстати сказать, выпускник Московского физико-технического института).

Дети, учитесь и берегите мир!

Две простые, но не вполне тривиальные формулы

М. КАГАНОВ

Речь пойдет о двух довольно простых явлениях: о течении жидкости или газа по трубе и о прохождении электрического тока по проводнику. Мне хотелось написать «о течении электрического тока» и отметить, что язык свидетельствует о сходстве, даже тождественности обоих явлений: и там, и там что-то течет. Потом сообразил, что «течение тока» – масло масляное.

Формула, описывающая течение жидкости по трубе, носит имя французского физиолога и физика Жана Луи Мари Пуазейля (1799 – 1869). Ее называют *законом Пуазейля*. А формулу, описывающую прохождение тока по проводнику, называют *законом Ома*. Георг Симон Ом – немецкий физик, жил с 1787 по 1854 год. Я привел годы жизни тех, именем которых названы обсуждаемые нами формулы, для того чтобы подчеркнуть: решил задуматься над старыми, хорошо изученными явлениями. Решил, так как заметил: если сравнивать эти явления, то можно обнаружить нечто интересное. Интерес трудно поддается определению. Одному интересно, а другому – безмерно скучно. Буду рад, если то, что интересно мне, покажется интересным и читателям.

Начнем с *закона Пуазейля*. Любая физическая формула включает в себя буквы (символы), обозначающие физические величины, которые могут быть определены и измерены независимым образом. Каждую физическую величину надо уметь определить независимо от других величин, входящих в формулу. Нам придется останавливаться на подобных вопросах. Но дальше – более конкретно, чтоб не увязнуть.

Скорость протекания жидкости или газа по трубе определяется величиной, называемой расходом. Расход, обозначаемый буквой Q , есть количество (масса) жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени:

$$Q = \pi R^2 \rho V,$$

если для простоты предположить, что труба – цилиндр радиусом R , ρ – плотность жидкости, а V – ее средняя по сечению трубы скорость. Размерность расхода есть

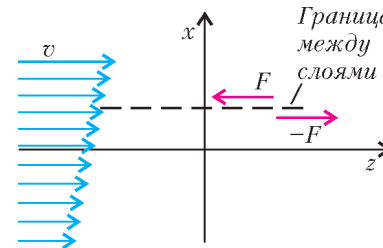
$$[Q] = \text{см}^2 \cdot (\text{г}/\text{см}^3) \cdot (\text{см}/\text{с}) = \text{г} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Закон Пуазейля утверждает:

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 L \nu}. \quad (1)$$

Здесь Δp – разность давлений на концах трубы длиной L , а ν – коэффициент кинематической вязкости, равный отношению обычной вязкости к плотности: $\nu = \eta/\rho$. Напомним,

что коэффициент вязкости (или просто вязкость) η описывает внутреннее (вязкое) трение в жидкости (или газе). Сила трения между слоями жидкости возникает в том случае, когда скорость течения меняется от слоя к слою. Если, например, жидкость течет в направлении z , а ее скорость v зависит от координаты x , то сила трения, в расчете на единицу площади границы, пропорциональна быстрой изменению скорости в поперечном направлении (см. рисунок):



$$\frac{F}{S} = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right|. \quad (2)$$

Эта формула написана для ламинарного течения (см. ниже) и фактически является определением коэффициента вязкости η . Отметим, что вязкое трение (как и любое трение) приводит к диссипации механической энергии, т.е. к превращению ее в тепловую энергию. Правда, с точки зрения молекулярной теории, механизм возникновения вязкого трения совсем не такой, как для сухого трения. За счет теплового движения молекулы из одного слоя перескакивают в другой. Молекулы из «медленного» слоя, попадая в «быстрый», должны (в среднем) приобрести дополнительную скорость, т.е. на них со стороны остальных молекул слоя должна подействовать сила «вперед». По третьему закону Ньютона, на слой со стороны «гостевых» молекул будет действовать сила «назад». Аналогично – для молекул, попадающих из «быстрого» слоя в «медленный».

Коэффициенты вязкости жидкостей и газов различаются на много порядков. Воспроизведем часть таблицы значений η и ν при температуре 20 °С, взятой из справочника:

	η , г/(см·с)	ν , см ² /с
Вода	0,010	0,010
Воздух	$1,8 \cdot 10^{-4}$	0,150
Спирт	0,018	0,022
Глицерин	8,5	6,8
Ртуть	0,0156	0,0012

Заметим, что здесь значения η (и ν) даны в граммах, сантиметрах и секундах. Обычно значение вязкости в справочниках приводится в единицах, обозначаемых Па·с, где единица давления Па названа по имени великого французского ученого – физика, математика и философа Блеза Паскаля (1623–1662). Иногда вязкость измеряют в пуазах (П): 1 П = 0,1 Па·с. Эта единица вязкости, конечно, получила свое название в честь Пуазейля.

Формула (1) и знание численных значений входящих в нее величин (радиуса трубы R , перепада давления Δp на расстоянии L и кинематической вязкости ν), естественно, позволяют вычислить расход Q , но, боюсь, мало помогут понять, что происходит. Специалисты, встречаясь с чем-то новым, пытаются выяснить *физику явления*, а иногда наоборот – понимая, что происходит или должно происходить, пытаются описать, как можно наблюдать нечто новое. Или, наконец, сами ставят эксперимент.

Прежде чем двигаться дальше, сделаем одно замечание. Все многократно наблюдали, что течение жидкости в разных

условиях происходит по-разному. Иногда жидкость бурлит, пенится. Такое движение называют турбулентным (от латинского *turbulentus* – беспорядочный). Плавное, спокойное течение жидкости называют ламинарным (по-латыни *lamina* – пластина, слой). Такое течение жидкости осуществляется как бы слоями, которые различаются только величиной скорости, медленно меняющейся от слоя к слою. Так вот, закон Пуазейля описывает ламинарное течение жидкости по трубе.

Теперь можно продолжать. Подставим в формулу (1) выражение для расхода Q , заменим кинематическую вязкость ее выражением $\nu = \eta/\rho$, сократим в правой и левой частях равенства совпадающие множители и для средней скорости V получим

$$V = \frac{1}{8} \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{\eta}. \quad (3)$$

Движение жидкости описывает гидродинамика. Гидродинамика – одна из наук, принадлежащих тому разделу физики, который принято называть макрофизикой. Другая наука, принадлежащая макрофизике, – теория упругости. Ее вместе с гидродинамикой часто объединяют в *механику сплошных сред*. Эта констатация – для того чтобы подчеркнуть: для гидродинамики жидкость это сплошная среда. В основных чертах гидродинамика была создана до того, как было осознано, что макроскопические тела состоят из атомов и молекул. В чем это проявляется? В том, что все величины – характеристики, описывающие жидкость, относятся к большому числу атомов. Например, гидродинамика имеет дело с плотностью. Плотность ρ , т.е. масса единицы объема, – явно макроскопическая величина. Даже скорость жидкости, которая может изменяться от «точки» к «точке» (например, по сечению трубы), при гидродинамическом описании есть не скорость отдельных частиц, а скорость элемента объема (массы) жидкости. Элемент объема мал по сравнению с радиусом трубы, но велик по сравнению с межатомными расстояниями, т.е. это макроскопический объект. Поэтому-то слово «точка» здесь взято в кавычки. Обычно так не поступают, и мы в дальнейшем не будем.

Теперь мы прекрасно знаем, что все макроскопические тела состоят из атомных частиц, а иногда и субатомных (так, в металлах имеются свободные электроны). Есть возможность выразить любые макроскопические величины через атомные, ионные, молекулярные или электронные характеристики. Простейший пример. Пусть жидкость состоит из молекул массой M , а n – число молекул в единице объема. Тогда $\rho = Mn$. Гидродинамическая скорость – скорость элемента объема $\vec{v}(\vec{r})$ – это средняя скорость молекул жидкости в этом объеме. Введенная выше (формула 3) скорость V есть среднее по сечению трубы значение скорости $\vec{v}(\vec{r})$. Эта скорость в обычных условиях (например, в водопроводных трубах) составляет несколько метров в секунду. Мы специально выделили курсивом утверждение, что введенная скорость V – это среднее значение скорости по сечению трубы. Чтобы не забыть. Мы покажем ниже, как скорость воды меняется с расстоянием от центра трубы.

«Что-то все слишком просто, – уверен, недоумевает читатель, – а тепловое движение молекул?» Попробуем разобраться. Напомним, что тепловое движение хаотично, молекулы движутся во все стороны, у теплового движения нет

выделенного направления. Средняя энергия теплового движения молекул равна

$$\frac{Mv_T^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T,$$

где v_T – скорость теплового движения, T – температура (в градусах Кельвина), k_B – постоянная Больцмана. Нетрудно посчитать, что для воды при обычных условиях ($T = 300$ К) скорость теплового движения составляет $v_T \approx 3 \cdot 10^2$ м/с. Теперь картина прояснилась: молекулы хаотически быстро двигаются во все стороны, сталкиваются друг с другом, обмениваются энергиями и импульсами, и вся эта движущаяся масса медленно (со скоростью, в сотни раз меньшей тепловой) движется по трубе. Таким образом, истинная скорость частицы есть $\vec{v}(\vec{r}) + \vec{v}_T$, но среднее значение тепловой скорости равно нулю. Гидродинамика способна описать лишь поведение средней скорости. В общем случае средняя скорость зависит не только от \vec{r} , но и от времени: $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$.

Задумаемся. Формула (3) утверждает: средняя скорость течения жидкости линейно зависит от приложенной силы. Конечно, именно разность давлений создает силу, под действием которой жидкость течет с постоянной средней скоростью. Согласно механике Ньютона, под действием постоянной силы тело движется с ускорением. Отсутствие ускорения указывает, что существует компенсирующая сила. Она, эта сила, направлена против внешней силы и линейно зависит от скорости течения. Равенство суммы сил нулю определяет среднюю скорость течения. Не будем говорить загадками. Сила, которая компенсирует внешнюю силу, это сила трения жидкости о стенки трубы. Сила трения тем больше, чем больше вязкость, и поэтому скорость V обратно пропорциональна вязкости.

Все сказанное относится к первой из двух формул, определивших название статьи. Обратимся теперь ко второй формуле – к *закону Ома*. В отличие от закона Пуазейля, его можно сформулировать так, чтобы равенство не содержало размеров проводника. Правда, только в том случае, если проводник достаточно больших (макроскопических) размеров. (Для модных ныне наноструктур такой подход неприемлем.)

Способность вещества проводить электрический ток описывается удельной электропроводностью σ , с помощью которой можно записать закон Ома в форме, не зависящей от конкретной формы и размеров образца. Если $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ – плотность электрического тока в точке \vec{r} , а $\vec{E}(\vec{r})$ – напряженность электрического поля в той же точке, то между ними есть линейная связь. Ее именуют законом Ома в локальной (дифференциальной) форме:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}), \quad (4)$$

где и плотность тока, и напряженность поля – векторные величины. В анизотропном проводнике, в кристалле, связь между \vec{j} и \vec{E} сложнее, но мы не будем на этом останавливаться. Отметим только, что характер этой анизотропной зависимости может быть установлен на основании свойств симметрии кристалла, для этого нет нужды знать природу проводимости. Характер анизотропии – следствие законов макроскопической физики. Другой важный вывод, не требующий уточнения природы проводимости, таков: в равновесных условиях $\sigma > 0$. Величина, обратная удельной проводимости, это удельное сопротивление: $\rho = 1/\sigma$. Закон Ома и

уравнения электродинамики сплошных сред – науки об электрических и магнитных свойствах макротел – позволяют рассчитать распределение тока и электромагнитных полей по проводнику. Самые разнообразные задачи электротехники и радиофизики решены таким путем и имеют огромное практическое значение.

Знание того, что в металлах и полупроводниках электрический ток осуществляется переносом зарядов электронами, позволяет записать плотность тока следующим образом: $\vec{j} = en_e \vec{V}_e$, где e – заряд электрона, n_e – число электронов в единице объема, а \vec{V}_e – средняя скорость движения электронов под действием электрического поля \vec{E} . Тогда получаем

$$\vec{V}_e = \frac{\sigma}{e^2 n_e} e \vec{E}. \quad (5)$$

Мы домножили и разделили на заряд электрона e , чтобы выделить силу \vec{F} , действующую на электрон: $\vec{F} = e \vec{E}$. Линейная зависимость средней скорости движения электронов от силы (скорости, а не ускорения!) показывает, что есть сила, компенсирующая силу \vec{F} . Это – сила трения электронов обо все, что мешает их движению по проводнику (см. ниже).

Среднюю скорость движения частиц (в данном случае электронов) удобно характеризовать подвижностью – средней скоростью частиц, обусловленной единичной силой. Пусть подвижность электронов есть U_e . Тогда, согласно формуле (5),

$$U_e = \frac{\sigma}{e^2 n_e}. \quad (6)$$

Значения удельной электропроводности σ , а точнее удельного сопротивления $\rho = 1/\sigma$, можно найти во многих справочниках. В лучших из них не только указано значение при определенной температуре, но задается и температурная зависимость $\rho(T)$. Проводимость существенно зависит от температуры. Но нас, скорее, будет интересовать не столько температурная зависимость, сколько полученная в электронной теории металлов зависимость удельной проводимости σ от параметров, описывающих электроны проводимости – тех, кто осуществляет перенос заряда, когда по проводнику течет ток.

Простейшая модель электронной проводимости – это модель Друде–Лоренца–Зоммерфельда, согласно которой перенос заряда в металле осуществляют свободные электроны. Откуда они взялись в металлах? При конденсации атомов в жидкость или кристалл более половины атомов, имеющих в таблице Менделеева, ионизируются: электроны, слабо связанные с ядром, вовсе теряют с ним связь и перемещаются свободно по кристаллу. Почему движение в периодическом поле ионов похоже на движение в свободном пространстве, объяснила квантовая механика. Мы не будем на этом останавливаться, а просто примем модель Друде–Лоренца: *в металле есть газ свободных электронов*. Я не забыл Зоммерфельда, а не упомянул его сознательно, так как наличие газа свободных электронов в металлах предположили Друде и Лоренц (о полупроводниках тогда не знали). Зоммерфельд же понял, что *электронный газ надо описывать квантовыми формулами*.

Будем последовательны. В любом металле есть газ свободных электронов. На каждую частицу действует сила $e \vec{E}$, обязанная разности потенциалов на концах проводника. Если бы это была единственная сила, действующая на

электроны, то они бы ускорялись. Этого не происходит. Электроны, сталкиваясь с любыми нарушениями, которые всегда есть в кристалле, теряют приобретенный от электрического поля импульс и тормозятся. Даже в идеальном кристалле, в котором нет ни примесей, ни дефектов в структуре кристаллической решетки, т.е. нарушений в строго периодическом расположении атомов или ионов, при отличной от нуля температуре происходит рассеяние. Причиной торможения электронов служит тепловое движение атомов, их колебания вокруг строго фиксированных центров. Только и именно благодаря столкновениям электроны по проводнику движутся с трением. А вот столкновения электронов друг с другом не приводят к торможению: при межэлектронных столкновениях импульс коллектива электронов перераспределяется между электронами, не диссипирует, не исчезает безвозвратно и поток электронов не тормозится.

Итак, в результате столкновений с центрами рассеяния в объеме проводника возникает сила трения. В согласии с законом Ома, сила трения пропорциональна средней скорости газа электронов и направлена против этой скорости. Теперь мы можем записать уравнение движения электронов, т.е. уравнение второго закона Ньютона:

$$m \frac{d\vec{V}_e}{dt} = e \vec{E} + \vec{F}_{\text{тр}}, \quad (7)$$

где m – масса электрона, а $\vec{F}_{\text{тр}} = -(m/\tau) \vec{V}_e$ – сила трения. Почему коэффициент пропорциональности между силой трения и скоростью написан в таком виде, сейчас будет ясно. В отсутствие электрического поля, когда $E = 0$, средняя скорость электронов обратится в ноль, даже если в момент выключения поля она не была равна нулю. Происходить этот процесс будет по экспоненциальному закону

$$V_e(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где V_0 – начальная скорость, а τ – время затухания направленного движения электронов. Если при каждом столкновении электрон заметно изменяет свой импульс, то по порядку величины τ – это среднее время свободного пробега электрона, или среднее время между двумя столкновениями. Умножив время τ на среднюю скорость теплового (хаотического) движения электронов, мы получим длину свободного пробега электронов l (среднюю, естественно). Чтобы закон Ома мог быть записан в виде формулы (4) с проводимостью, не зависящей от радиуса проволоки R , должно выполняться сильное условие: $R \gg l$. (В наноструктурах обычно $l > R$.)

Зная выражение для силы трения, из условия $e \vec{E} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0$ нетрудно найти не зависящую от времени среднюю скорость V_e и вычислить коэффициент электропроводности σ :

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{m}. \quad (8)$$

Может показаться странным: зачем один коэффициент σ выражать через два других n_e и τ (заряд электрона и его масса известны)? Дело в том, что оба параметра n_e и τ могут быть независимо измерены, а тем самым формула (8), одна из важнейших формул электронной теории металлов, может быть проверена. Кроме того, n_e и τ имеют простой физический смысл, так что формула (8) *объясняет закон Ома*. Она справедлива не только для металлов, но и для полупроводников, хотя значения n_e и τ у полупроводников заметно

отличаются от соответствующих значений в металлах. Подставляя выражение (8) в формулу (6) для подвижности электронов, получим

$$U_e = \frac{\tau}{m}. \quad (9)$$

А теперь попытаемся определить подвижность частиц при пуазейловом течении жидкости. Это чуть более сложная задача. Впрочем, вывод формулы для подвижности читатель может опустить и сразу включиться в обсуждение полученного результата.

Частицы жидкости теряют импульс только при столкновении со стенкой трубы. Их столкновения между собой, казалось бы, можно не учитывать по тем же причинам, что и межэлектронные столкновения. Однако это не так. Как мы знаем, при столкновениях происходит перераспределение импульса между частицами. При стационарном ламинарном пуазейловом течении в соседних слоях жидкости скорости течения несколько отличаются: чем дальше от центра трубы, тем скорость меньше. Сила вязкого трения пропорциональна не скорости, как при столкновении электронов с препятствиями, а второй производной средней скорости по координате.

Действительно, на каждый слой жидкости действует сила трения (2) с двух сторон. Если бы производная dv/dx была постоянна, то эти силы были бы равны друг другу и полная сила равнялась бы нулю. Ненулевая результирующая сила возникает только в том случае, если dv/dx зависит от x , т.е. если вторая производная отлична от нуля.

Уравнение движения вязкой жидкости выглядит так:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Напомним, что $\partial v/\partial t$ и т.д. – так называемые частные производные. Если функция зависит от нескольких переменных, например от t, x, y, z , то $\partial v/\partial t$ обозначает производную по времени t при постоянных x, y, z и т.д.

Для простоты мы рассмотрим движение жидкости не по цилиндрической трубе, а между двумя бесконечными параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно $2d$. Расход Q будем определять через квадрат со стороной $2d$. Пусть жидкость течет вдоль оси z , так что $v = v(x, t)$ – это составляющая вектора скорости по оси z , а производная $\partial p/\partial z$, равная $-\Delta p/L$, есть постоянная величина. Плотность ρ запишем в виде $\rho = Mn_i$, где M – масса молекулы жидкости, а n_i – число молекул в единице объема. (Здесь и далее « l » от английского liquid – жидкость.) Теперь уравнение (10) примет вид

$$M \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{n_i} \frac{\Delta p}{L} + \frac{\eta}{n_i} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Очевидно, что на каждую частицу жидкости действуют две силы: внешняя сила (первое слагаемое в правой части уравнения) и сила вязкого трения (второе слагаемое). Равенство механической силы силе трения в каждой точке между плоскостями ($-d < x < d$) позволяет определить скорость $v = v(x)$ стационарного ($\partial v/\partial t = 0$) течения. Итак,

$$-\frac{\Delta p}{L} = \eta \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (11)$$

На стенках «трубы» (при $x = -d$ и $x = d$) скорость равна нулю. Легко проверить, что решением уравнения (11) служит простая функция

$$v(x) = \frac{\Delta p}{2L\eta} (d^2 - x^2). \quad (12)$$

Отсюда нетрудно найти среднюю скорость:

$$V = \frac{1}{3} \frac{\Delta p}{L} \frac{d^2}{\eta}. \quad (13)$$

и расход, равный в нашем случае $(2d)^2 \rho V$:

$$Q = \frac{4}{3} \frac{\Delta p}{L} \frac{d^4}{\eta}. \quad (14)$$

Разделив среднюю скорость V на величину внешней силы $\frac{1}{n_i} \frac{\Delta p}{L} = \frac{M}{\rho} \frac{\Delta p}{L}$, найдем подвижность U_l частицы жидкости.

Получается, что подвижность пуазейловой частицы жидкости равна

$$U_l = \frac{1}{3} \frac{d^2}{\eta} \frac{1}{M} \approx \frac{\tau_l}{M} \quad (\text{где } \tau_l = \frac{d^2}{\eta}). \quad (15)$$

Благодаря выбранным обозначениям, формула (15) похожа на формулу (9). В обоих случаях в знаменателе стоит масса отдельной частицы, коллектив которых ответствен за описываемое явление. В первом случае – за электропроводность, во втором случае – за вязкость. То, что подвижность обратно пропорциональна массе частицы, вполне естественно: чем частица тяжелее, тем медленнее она движется. Параметры τ и τ_l , имеющие размерность времени, определяются характером диссипативных процессов. Их природа совсем различная.

Параметр τ есть время свободного пробега электрона металла или полупроводника. За это время в среднем каждый электрон с чем-то столкнется, в результате чего потеряет приобретаемый от электрического поля импульс. Так устанавливается стационарное состояние: средняя скорость электронов не возрастает и не убывает.

Теперь поговорим о параметре τ_l . Вернемся к движению жидкости по трубе. Мы уже знаем, что вдали от стенок трубы частицы не могут потерять приобретенный от внешней силы импульс, для этого они должны столкнуться со стенкой. Но до стенки надо добраться. Не будь столкновений, вся жидкость, все ее частицы двигались бы с ускорением под действием внешней силы. Столкновения перемешивают частицы, они переходят из слоя в слой. Причина столкновений – тепловое движение молекул жидкости. Как правило, скорость теплового движения молекул значительно больше, чем скорость упорядоченного движения. Тепловое движение хаотично. Поэтому хаотичны и столкновения. В направлении от центра трубы к стенке никакая внешняя сила не действует. Частицы из слоев, далеких от стенок, попадают на стенку в результате многих столкновений после относительно длительного случайного блуждания. Так вот, время τ_l есть время, которое частица в среднем тратит на то, чтобы в результате случайного блуждания из центра трубы добраться до стенки. Неудивительно, что τ_l тем больше, чем больший путь надо преодолеть частице.

Итак, сравнивая разные явления, иногда обнаруживаешь неожиданное сходство, иногда – существенное различие, но всегда или по меньшей мере часто нечто проясняется. Тешу себя мыслью, что сравнение пуазейлового течения жидкости по трубе и похождения электрического тока по проводнику было небесполезно.

Описанные четырёхугольники и ломанные

Н. БЕЛУХОВ, П. КОЖЕВНИКОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ВЫЯВИМ СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ЗАДАЧАМИ О КАСАТЕЛЬНЫХ К ОКРУЖНОСТЯМ И ЗАДАЧАМИ ОБ ОПИСАННЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ. В РЕШЕНИЯХ БУДЕМ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ КЛАССИЧЕСКИМ КРИТЕРИЕМ:

(*) *выпуклый четырёхугольник ABCD является описанным тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + DA$.* Также сформулируем теоремы, обобщающие критерий и рассматриваемые задачи.

Серия задач

Начнем с такой задачи.

Задача 1 (М2007). *Выпуклый четырёхугольник ABCD описан около окружности с центром I. На отрезках AI и IC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$. Докажите, что $\angle MDN = \frac{1}{2} \angle ADC$.*

Вероятно, проще всего решить эту задачу с использованием тригонометрии. Однако, сделав дополнительные построения, мы переформулируем задачу и затем решим ее геометрически.

Заметим, что равенство $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$ равносильно равенству $\angle MBN = \angle MBA + \angle NBC$ (рис. 1). Впишем в угол BAD окружность ω_a с центром в M, а в угол BCD –

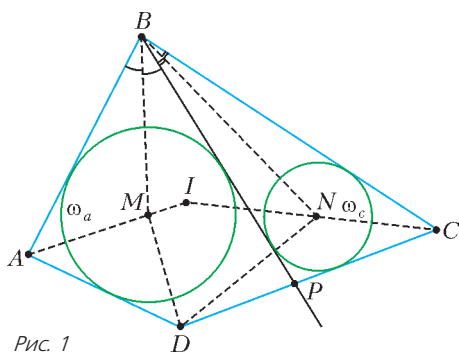


Рис. 1

окружность ω_c с центром в N (ясно, что окружности ω_a и ω_c лежат внутри четырёхугольника ABCD). Через точку B проведем лучи BP и BP', являющиеся вторыми касательными к окружностям ω_a и ω_c . Так как $\angle MBP = \angle MBA$ и $\angle NBP' = \angle NBC$, то равенство $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$ эквивалентно равенству $\angle MBN = \angle MBP + \angle NBP'$, т.е. совпадению BP и BP'. Итак, равенство $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$ означает, что B лежит на одной из общих (внутренних) касательных

к окружностям ω_a и ω_c . Точно так же равенство $\angle MDN = \frac{1}{2} \angle ADC$ означает, что точка D лежит на общей касательной к окружностям ω_a и ω_c . Тем самым, мы приходим к следующей интересной переформулировке задачи 1.

Задача 2. *Внутри описанного четырёхугольника ABCD расположены окружности ω_a и ω_c , вписанные в углы BAD и BCD. Известно, что B лежит на одной из общих внутренних касательных к окружностям ω_a и ω_c . Докажите, что D также лежит на общей внутренней касательной к ω_a и ω_c (другой, если касательных две).*

Решение. Пусть P – такая точка, лежащая на одном из отрезков AD и DC, что BP – общая внутренняя касательная окружностей ω_a и ω_c . Считаем, что прямая BP отлична от прямой BD (иначе см. упражнение 1), и пусть для определенности P лежит на отрезке DC (рис. 2). Проведем касательную DQ к окружности ω_c (Q – точка на стороне BC).

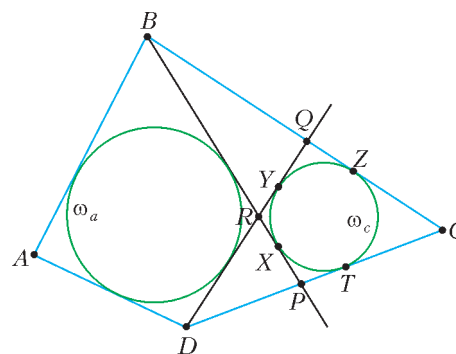


Рис. 2

Пусть R – точка пересечения прямых BP и DQ, а прямые BP, DQ, BC и DC касаются окружности ω_c в точках X, Y, Z, T соответственно.

Так как четырёхугольник ABCD описанный, то

$$BA + DC = BC + DA, \text{ или } BA - DA = BC - DC.$$

Используя равенство отрезков касательных, проведенных из одной точки, имеем

$$BR - DR = BX - DY = BZ - DT = BC - DC.$$

Из равенств $BA - DA = BC - DC$ и $BR - DR = BC - DC$ следует

$$BR - DR = BA - DA, \text{ или } BR + DA = BA + DR.$$

Значит, четырёхугольник ABRD описанный, следовательно, DQ – общая касательная к ω_a и ω_c .

Упражнение 1. Докажите, что в описанном четырёхугольнике ABCD окружности, вписанные в треугольники BAD и BCD, касаются. (Иначе говоря, если в условии задачи 2 прямая BD – общая касательная к окружностям ω_a и ω_c , то ω_a и ω_c касаются друг друга.) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Из решения видно, что утверждение задачи 2 останется в силе, если четырёхугольник ABCD удовлетворяет равенству $AB + CD = BC + DA$ и невыпуклый (т.е. один из плоских углов ABC, ADC больше 180°), либо «вырожденный» (скажем, треугольник ABC с точкой D на стороне AC).

Упражнение 2. Докажите, что в треугольнике ABC точка D на стороне AC, для которой выполнено равенство $AB + CD = BC + DA$, – это точка касания вписанной окружности со стороной AC.

Применяя утверждение задачи 2 в случае «вырожденного» четырехугольника, можно получить решение следующих двух задач.

Задача 3 (Всероссийская олимпиада, 2009 г.). *Окружность с центром I касается сторон AB , BC , AC неравностороннего треугольника ABC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Окружности ω_b и ω_c вписаны в четырехугольники BA_1C_1 и CA_1B_1 соответственно. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_b и ω_c , отличная от IA_1 , проходит через точку A .*

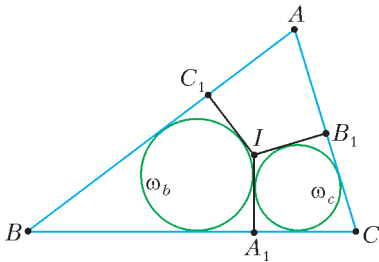


Рис. 3

как $AB + A_1C = AC + A_1B$ (см. упражнение 2), то можно применить результат задачи 2 для «вырожденного» четырехугольника A_1BAC . Получаем, что вторая общая касательная окружностей ω_b и ω_c проходит через вершину A .

Задача 4 (Устная олимпиада по геометрии, 2009 г.). *Фиксированы две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 , одна их внешняя касательная l и одна их внутренняя касательная m . На прямой m выбирается точка X , а на прямой l строятся точки Y и Z так, что прямые XY и XZ*

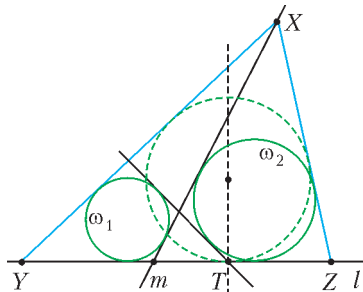


Рис. 4

касаются ω_1 и ω_2 соответственно, а треугольник XYZ содержит окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что центры окружностей, вписанных во всевозможные треугольники XYZ , лежат на одной прямой.

Решение. По условию прямая m – общая внутренняя касательная к ω_1 и ω_2 , проходящая через X . Пусть T – точка касания окружности, вписанной в треугольник XYZ , со стороной YZ (рис. 4). Применив результат задачи 2 для «вырожденного» четырехугольника $T Y X Z$, получаем, что вторая общая внутренняя касательная окружностей ω_1 и ω_2 проходит через T . Значит, точка T фиксированная, и центры окружностей, вписанных во всевозможные треугольники XYZ , лежат на прямой, перпендикулярной l и проходящей через точку T .

Окружности, вписанные в ломаные: условия существования

При решении задачи 2 фактически доказано следующее утверждение: если внутри невыпуклого четырехугольника $BCDR$ существует окружность, касающаяся прямых BC , CD , DR и RB , то $BR + DC = BC + DR$. Оказывается, верно и обратное. Это видоизменение критерия (*), известны и другие его вариации. Чтобы сформулировать их в виде одной теоремы, примем следующие соглашения. Будем коротко называть 4-ломаной $(AC|BD)$ четверку отрезков AB , BC , CD , DA такую, что точки A , B , C , D различны и не лежат на одной прямой. (Так, $(AC|BD)$, $(CA|BD)$, $(DB|CA)$ и т.д. – это разные обозначения одной и той же 4-ломаной.) Назовем 4-ломаную $(AC|BD)$ *вырожденной*, если какие-то

три из точек A , B , C , D лежат на одной прямой. Скажем, что 4-ломаная $(AC|BD)$ *центральная*, если $ABCD$ – параллелограмм. Назовем невырожденную 4-ломаную $(AC|BD)$ *описанной*, если существует окружность ω , которой касаются прямые AB , BC , CD и DA . В случае вырожденной 4-ломаной $(AC|BD)$ (пусть, скажем, A , B и C лежат на одной прямой), потребуем дополнительно, чтобы касание прямой AB с ω происходило в точке B . Окружность ω будем называть *вписанной* в 4-ломаную (хотя это не всегда соответствует привычному понятию окружности, вписанной в многоугольник (см. примеры ниже)).

Оказывается, критерий существования окружности, вписанной в нецентральную 4-ломаную, можно сформулировать так:

(**) *нецентральная 4-ломаная $(AC|BD)$ является описанной тогда и только тогда, когда четыре отрезка AB , BC , CD , AD можно разбить на две пары отрезков с равными суммами длин.*

Доказывать критерий мы не будем, но идею доказательства обсудим ниже в конце этого раздела.

Теперь выделим три способа вписать окружность в 4-ломаную $(AC|BD)$.

Для начала заметим, что если окружность касается (не совпадающих) прямых XY и YZ , то ее центр лежит на одной из двух прямых: на внутренней или на внешней биссектрисе угла XYZ . Чтобы было удобнее работать с вырожденными 4-ломаными, также будем говорить о биссектрисах нулевого и развернутого угла в следующем смысле. Пусть точки X , Y , Z лежат на одной прямой, причем Y лежит между X и Z . Если окружность касается прямой XY в точке X (Y), то ее центр лежит на перпендикуляре l_x (l_y) к прямой XY , проведенном через X (Y). Поэтому можно считать прямую l_x внешней биссектрисой нулевого угла YXZ , а прямую l_y – внутренней биссектрисой развернутого угла XYZ .

Скажем, что окружность ω вписана в 4-ломаную $(AC|BD)$ *внутренним образом*, если ее центр лежит на пересечении внутренних биссектрис углов ABC , BCD , CDA , DAB ;

(AC)-внешним образом, если ее центр лежит на пересечении внутренних биссектрис углов ABC , CDA и внешних биссектрис углов BCD , DAB ;

(BD)-внешним образом, если ее центр лежит на пересечении внешних биссектрис углов ABC , CDA и внутренних биссектрис углов BCD , DAB .

Например, на рисунке 2 окружность ω_c вписана в 4-ломаную $(BD|CR)$ внутренним образом. Другой пример: если невписанная окружность ω_a треугольника ABC касается стороны BC в точке A' , то окружность ω_a вписана в (вырожденную) 4-ломаную $(AA'|BC)$ *(BC)-внешним образом*.

Упражнения

3. Покажите, что если ω вписана в 4-ломаную $(AC|BD)$, то она вписана одним из трех указанных выше способов. (Например, центр ω не может лежать одновременно на внутренней биссектрисе угла ABC и на внешней биссектрисе угла CDA .)

4. Пусть окружность ω вписана в 4-ломаную $(AC|BD)$. Покажите, что она вписана *внутренним образом* тогда и только тогда, когда замкнутая ломаная $ABCD$ несамопересекающаяся и ω лежит внутри четырехугольника (возможно, невыпуклого) $ABCD$.

Справедливо следующее усиление критерия (**).

Теорема 1. *4-ломаная $(AC|BD)$ является описанной*

i) внутренним образом тогда и только тогда, когда

$$AB + CD = BC + DA; \quad (1)$$

ii) (AC)-внешним образом тогда и только тогда, когда она не центральная и

$$AB + DA = BC + CD; \quad (2)$$

iii) (BD)-внешним образом тогда и только тогда, когда она не центральная и

$$AB + BC = CD + DA. \quad (3)$$

Подробного доказательства этой теоремы мы здесь не приводим, ограничиваясь следующими замечаниями. Из того, что 4-ломаная описанная, нетрудно получить одно из соотношений (1), (2), (3), используя равенства отрезков касательных (аналогично тому, как это было проделано в решении задачи 2). Доказать же то, что ломаная описана, исходя из соотношений, труднее. Это можно сделать аналогично доказательству критерия (*), рассмотрев разные случаи расположения 4-ломаной. Идея геометрического доказательства, основанного на свойствах коник, описана в последней части этой статьи.

Упражнение 5. Докажите, что:

- а) существует не более двух окружностей, вписанных в 4-ломаную;
- б) в 4-ломаную можно вписать две окружности тогда и только тогда, когда она не центральная и имеет ось симметрии.

Теорема транзитивности

Теперь схему решения задачи 2 можно описать так: происходит перенос (или *транзит*) условия существования вписанной окружности с двух 4-ломаных (BD|AC) и (BD|CR) на третью 4-ломаную (BD|RA). Та же схема работает и в такой более общей ситуации.

Теорема 2 (теорема транзитивности). Пусть даны 4-ломаные (AB|XY), (AB|YZ) и (AB|ZX). Тогда

- i) если для двух из них существуют окружности, вписанные внутренним образом, то и для третьей – тоже;
- ii) если для (AB|XY) и (AB|YZ) существуют окружности, вписанные соответственно (XY)-внешним и (YZ)-внешним образом, и 4-ломаная (AB|ZX) не центральная, то для нее существует окружность, вписанная (ZX)-внешним образом;
- iii) если для (AB|XY) и (AB|YZ) существуют окружности, вписанные (AB)-внешним образом, то для (AB|ZX) существует окружность, вписанная внутренним образом;
- iii') если для (AB|XY) существует окружность, вписанная (AB)-внешним образом, для (AB|ZX) существует окружность, вписанная внутренним образом, и 4-ломаная (AB|YZ) не центральная, то для нее существует окружность, вписанная (AB)-внешним образом.

Доказательство. Докажем, например, утверждение (ii).

Если в ломаные (AB|XY) и (AB|YZ) можно вписать окружности соответственно (XY)-внешним и (YZ)-внешним образом, то по теореме 1 имеем

$$AX + BX = AY + BY, \quad AY + BY = AZ + BZ.$$

Отсюда

$$AX + BX = AZ + BZ,$$

и получаем (снова по теореме 1), что в ломаную (AB|ZX) можно вписать окружность (ZX)-внешним образом.

Упражнение 6. Докажите другие утверждения теоремы 2.

Следующая задача, как и предыдущие, оказывается следствием теоремы 2.

Задача 5 (M1025). Две прямые, проходящие через точки пересечения пар противоположных сторон выпуклого четырехугольника, делят его на четыре меньших четырехугольника. Докажите, что если два меньших четырехугольника, не имеющих общей стороны, описанные, то и исходный четырехугольник описанный.

Решение. Возможны два случая расположения четырехугольников, про которые известно, что они описанные (рис.5 и 6).

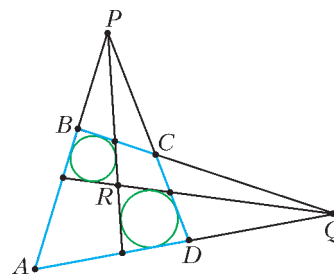


Рис. 5

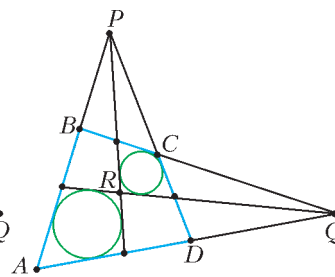


Рис. 6

В первом случае 4-ломаные (PQ|BR) и (PQ|RD) являются описанными соответственно (BR)-внешним и (RD)-внешним образом, значит, по теореме 2, 4-ломаная (PQ|DB) является описанной (DB)-внешним образом, т.е. четырехугольник ABCD описанный.

Во втором случае 4-ломаные (PQ|AR) и (PQ|RC) являются описанными внутренним образом, следовательно, 4-ломаная (PQ|CA) также является описанной внутренним образом, откуда следует требуемое.

Упражнения

7. а) Сформулируйте и докажите аналоги утверждений задачи 4 в том случае, когда треугольник XYZ не обязательно содержит окружности.

б) Сформулируйте аналогичную задачу для точки X на внешней касательной и точек Y и Z на внутренней.

8. Сформулируйте и докажите еще одну теорему транзитивности про три 4-ломаные (AB|CD), (AC|BD) и (AD|BC). В частности, получите решение такой задачи:

На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты соответственно точки A', B', C' так, что отрезки AA', BB', CC' пересекаются в одной точке D. Докажите, что если два из четырехугольников AB'DC', BC'DA', CA'DB' описанные, то третий также является описанным.

Описанные ломаные с вершиной... на бесконечности

Если вершина D 4-ломаной (AC|BD) расположена далеко от остальных, то лучи AD и CD «почти сонаправленные». А что если в самом деле сделать их сонаправленными?

Итак, давайте называть 4_∞-ломаной (BD_∞|AC) объединение отрезков AB, BC и сонаправленных, но не лежащих на одной прямой, лучей AD' и CD'' (точки A, B, C предполагаются различными; рис.7). Окружность, вписанная в 4_∞-ломаную (BD_∞|AC), должна одновременно касаться прямых AB и BC и быть вписанной в полосу между параллельными пря-

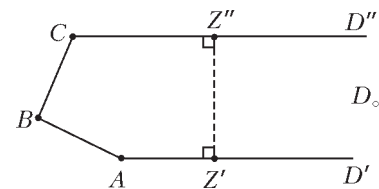


Рис. 7

мыми AD' и CD'' . Как и раньше, принимаем дополнительное соглашение для вырожденных 4_∞ -ломанных: например, если прямые AD' и AB совпадают, то вписанная окружность должна касаться прямой AB в точке A .

Можно выделить два способа вписать окружность в 4_∞ -ломаную $(AC|BD_\infty)$: внутренним и (AC) -внешним образом (или просто внешним образом). Придадим смысл выражению $AD_\infty - CD_\infty$ и сформулируем теорему, аналогичную теореме 1. Положим $AD_\infty - CD_\infty = c$, если на лучах AD' и CD'' найдены соответственно точки Z' и Z'' такие, что $Z'Z'' \perp AD'$ и $AZ' - CZ'' = c$.

Упражнение 9. а) Покажите, что разность $AD_\infty - CD_\infty$ определена корректно, т.е. не зависит от выбора на лучах точек Z' и Z'' с условием $Z'Z'' \perp AD'$.

б) Для трех сонаправленных лучей AD' , CD'' и ED'' докажите равенство $(AD_\infty - CD_\infty) + (CD_\infty - ED_\infty) = AD_\infty - ED_\infty$.

Теорема 1'. 4_∞ -ломаная $(BD_\infty|AC)$ является описанной тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух равенств

$$AD_\infty - CD_\infty = AB - CB, \tag{1'}$$

$$AD_\infty - CD_\infty = CB - AB, \tag{2'}$$

причем в первом случае существует окружность, вписанная внутренним образом, а во втором случае – внешним образом.

Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно. В конце статьи будет предложена идея доказательства, использующего коники.

Упражнение 10. Определите ломаную с двумя вершинами «на бесконечности». Как для нее будет звучать аналог теоремы 1'?

Теорема 2'. Пусть даны 4_∞ -ломанные $(AB_\infty|XY)$, $(AB_\infty|YZ)$ и $(AB_\infty|ZX)$. Тогда

i) если для двух из них существуют окружности, вписанные внутренним образом, то и для третьей – тоже;

ii) если для двух из них существуют окружности, вписанные внешним образом, то и для третьей – тоже.

Доказательство. i) Пусть, скажем, в 4_∞ -ломаные $(AB_\infty|XY)$, $(AB_\infty|YZ)$ можно вписать окружности внутренним образом. Тогда по теореме 1' имеем

$$XB_\infty - YB_\infty = XA - YA, \quad YB_\infty - ZB_\infty = YA - ZA.$$

Сложив эти равенства, получаем (с учетом результата упражнения 9,б) $XB_\infty - ZB_\infty = XA - ZA$, значит (снова по теореме 1'), для 4_∞ -ломаной $(AB_\infty|ZX)$ существует окружность, вписанная внутренним образом.

Случай (ii) разбирается аналогично.

К ситуации, описанной в теореме 2', можно свести следующую задачу.

Задача 6 (M1293) В угол с вершиной O вписаны две непересекающиеся окружности. Треугольник ABC расположен между ними так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих окружностей. Докажите, что сумма радиусов окружностей равна высоте треугольника, опущенной из вершины A .

Решение. Пусть, для определенности, точка B лежит между точками O и C , и ω_1, ω_2 – окружности, соответственно, вписанная в треугольник OAB и невписанная для треугольника OAC (рис.8). Отразив треугольник OAB симметрично относительно точки A , получим треугольник $AO'B'$ с вписанной окружностью ω'_1 , равной ω_1 . Так как $AB = AC = AB'$, то $B'C \perp BC$. Проведем вторую касатель-

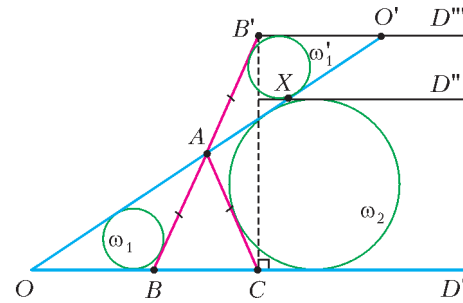


Рис. 8

ную, параллельную $B'O'$, к окружности ω'_1 , пусть она пересекает AO' в точке X . Пусть XD'' и $B'D''$ – лучи, сонаправленные с лучом $OC = OD'$. Рассмотрим три 4_∞ -ломанные $(AD_\infty|CB')$, $(AD_\infty|B'X)$ и $(AD_\infty|XC)$. Первая из них симметрична относительно биссектрисы угла CAB' , поэтому для нее существует окружность, вписанная внутренним образом. По построению, ω'_1 – окружность, вписанная в $(AD_\infty|B'X)$. Значит, по теореме 2', для 4_∞ -ломаной $(AD_\infty|XC)$ существует окружность, вписанная внутренним образом. Но эта окружность должна совпадать с ω_2 . Получаем, что ω_2 также касается прямой XD'' , поэтому сумма диаметров окружностей ω_2 и ω'_1 равна расстоянию между прямыми OB и $O'B'$, т.е. удвоенной высоте треугольника ABC .

Упражнение 11. Сформулируйте и докажите теорему 2 в случае, когда одна из точек X, Y, Z бесконечно удаленная.

Как мы видели, задачи 1 – 6 (и многие другие) с такими разными геометрическими сюжетами – близкие родственники: их предком можно считать теорему транзитивности.

Описанные ломаные и... коники

В заключение отметим связь между описанными ломаными и кониками – эллипсом, гиперболой и параболой.

Пусть на плоскости даны точки F_1 и F_2 на расстоянии $F_1F_2 = l$ и прямая d , не проходящая через F_1 . Как известно (см., например, [2]), множеством точек M таких, что:

$F_1M + F_2M = c$, где $c > l$ – фиксированное число, является эллипс с фокусами F_1 и F_2 ;

$F_1M - F_2M = c$, где $c \in (-l; l)$, является при $c \neq 0$ ветвь гиперболы, а при $c = 0$ – серединный перпендикуляр к отрезку F_1F_2 ;

F_1M равно расстоянию от M до прямой d , является парабола с фокусом F_1 и осью, перпендикулярной d .

Эллипс (гипербола) однозначно определяется фокусами и точкой на нем (ней). Параболу можно однозначно восстановить по точке на ней, фокусу и направлению оси (здесь под направлением оси мы понимаем луч, параллельный оси симметрии параболы и не пересекающий параболу).

Теперь посмотрим, что означают равенства из условий теорем 1 и 1' (возможные случаи приведены на рисунке 9).

Равенство (1) эквивалентно тому, что точки B и D лежат на одной ветви гиперболы с фокусами A и C (или на серединном перпендикуляре к AC), а также аналогичному условию с заменой пары A, C на пару B, D ;

(2) для нецентральной 4 -ломаной означает, что точки A и C лежат на одном эллипсе с фокусами B и D или что точки B и D лежат на разных ветвях одной гиперболы с фокусами A и C ;

(3) – аналогично (2) с заменой пары A, C на пару B, D ;

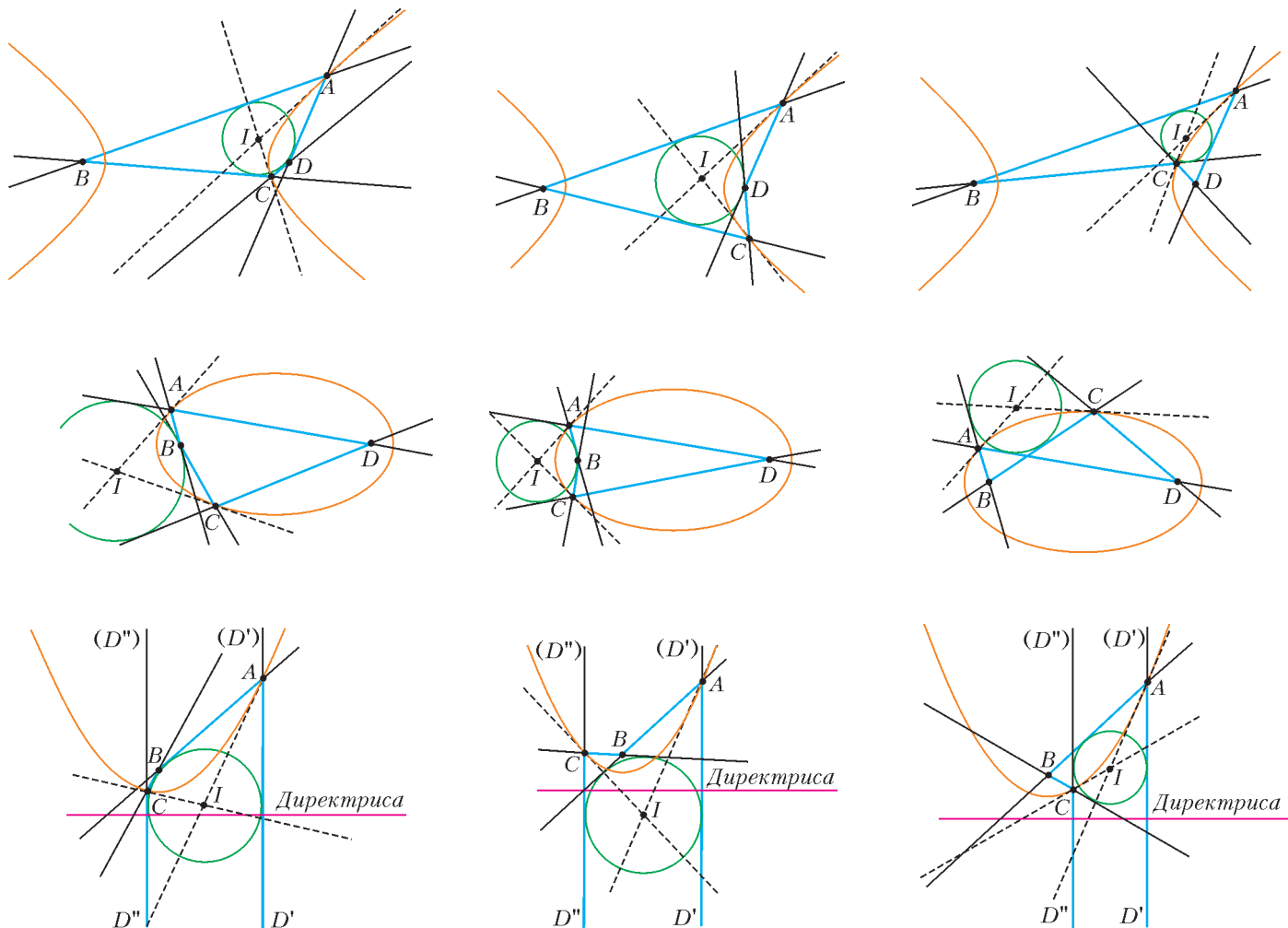


Рис. 9

(1') (соответственно (2')) означает, что точки A и C лежат на одной параболы с фокусом B и осью, противоположно направленной (для (2') – сонаправленной) лучу AD' .

С помощью этих соображений и свойств коник можно доказать существование вписанной окружности в теоремах 1 и 1'. Возьмем, например, утверждение (ii) теоремы 1. Точки A и C лежат на одном эллипсе с фокусами B и D . По условию, 4-ломаная $(AC|BD)$ не центральная, поэтому точки A и C – не диаметрально противоположные точки эллипса. Касательные к эллипсу, проведенные в точках A и C , пересекаются в некоторой точке I . Оказывается, что I равноудалена от прямых AB, BC, CD, DA , т.е. 4-ломаная $(AC|BD)$ описана вокруг окружности с центром I . Действительно, в силу оптического свойства эллипса (см., например, [3]), I лежит на внешних биссектрисах углов BAD и BCD и, кроме того (см. например, задачу 1.4 из книги [1]), прямая BI – биссектриса угла ABC .

Похожие рассуждения можно провести с использованием гиперболы и параболы – всякий раз центр искомой окружности находится на пересечении соответствующих касательных к конике (см. рис.9).

Ситуацию, происходящую в теоремах транзитивности 2 и 2', теперь можно трактовать таким образом:

в утверждении (i) теоремы 2 точки X, Y, Z лежат на одной ветви гиперболы с фокусами A, B или на среднем перпендикуляре к отрезку AB ;

в утверждении (ii) теоремы 2 точки X, Y, Z лежат на одном эллипсе с фокусами A, B ;

в утверждении (iii) теоремы 2 точки X, Y, Z лежат на одной гиперболы с фокусами A, B , причем две из них – на одной ветви, а одна – на другой;

в теореме 2' точки X, Y, Z лежат на одной параболы с фокусом A и осью, противоположно направленной – в случае (i) или сонаправленной – в случае (ii), с лучом XB' .

Упражнения

12. Дана 4_∞ -ломаная $(AC|BD_\infty)$, в которой $AB \neq BC$. Докажите, что она описана тогда и только тогда, когда AD' параллельна одной из асимптот гиперболы с фокусами A и C , проходящей через B .

13. Докажите, что центр окружности, вписанной в вырожденную 4-ломаную или вырожденную 4_∞ -ломаную, лежит на директрисе (определение директрисы см., например, в [2]) соответствующей коники.

Список литературы

1. Акоюн А.В., Заславский А.А. *Геометрические свойства кривых второго порядка*. – М.: МЦНМО, 2007.
2. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. *Прямые и кривые* (издание 6-е, стереотипное). – М.: МЦНМО, 2006.
3. Протасов В.Ю. *Максимумы и минимумы в геометрии*. – М.: МЦНМО, 2005.

Динамика движения по окружности

А. ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССМОТРИМ НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ НА динамику движения тел по окружности. Теоретическим основанием для решения таких задач служит следующее кинематическое утверждение: если материальная точка движется со скоростью v по окружности радиусом R , то проекция ускорения точки на ось x , проведенную от точки к центру окружности, равна

$$a_x = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R,$$

где $\omega = v/R$ – угловая скорость точки в данный момент времени. Эту проекцию ускорения называют *нормальным* (перпендикулярным к скорости) или *центростремительным* ускорением. Если скорость точки постоянна, то в каждый момент времени вектор ускорения направлен к центру окружности, т.е. нормальное ускорение равно полному ускорению. Такое же выражение для нормального ускорения оказывается верным для движения материальной точки по *любой* криволинейной траектории, только под R в этом случае подразумевают *радиус кривизны* траектории, т.е. радиус окружности, наиболее близко примыкающей к траектории в данной точке.

Чтобы учесть эту информацию при решении задач динамики, надо одну из осей, на которые проецируется уравнение второго закона Ньютона, направить от движущейся точки к центру окружности (по радиусу). Выбор других осей (если они нужны) диктуется удобством решения.

Важное предостережение: силы, стоящие в уравнении второго закона Ньютона для тела, движущегося по окружности, должны быть такие же, как и в динамике прямолинейного движения. Это сила тяжести (или всемирного тяготения), сила упругости, сила нормальной реакции опоры, сила натяжения нити, сила трения покоя или скольжения и т.д. Вводить какие-либо специальные силы, типа центростремительной или центробежной силы, не следует. (Напомним, что центробежной силой называют одну из сил инерции, возникающих при переходе в неинерциальную вращающуюся систему отсчета. При решении задач в инерциальной системе отсчета это понятие не имеет смысла.)

Задача 1. Какую минимальную скорость должен развить автомобиль массой $m = 2000$ кг, чтобы благополучно проехать по выпуклому мосту, имеющему вид дуги окружности радиусом $R = 100$ м, если мост выдерживает нагрузку не более $F = 18000$ Н?

Решение. Выясним, в какой точке дуги сила давления на мост будет самой большой. Для этого вычислим эту силу в точке, направление на которую из центра окружности составляет угол α с вертикалью (рис.1). По третьему закону

Ньютона сила давления F автомобиля на мост равна силе нормальной реакции N моста на автомобиль. Направим ось x от автомобиля к центру окружности и запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось:

$$mg \cos \alpha - N = \frac{mv^2}{R},$$

$$\text{т.е. } N = mg \cos \alpha - \frac{mv^2}{R}. \quad (1)$$

Сила тяги и сила сопротивления, действующие на автомобиль в этой точке, перпендикулярны оси x и поэтому не входят в уравнение (и не изображены на рисунке). Видно, что сила давления максимальна при $\alpha = 0$, т.е. в верхней точке моста. При минимально допустимой скорости сила давления достигает критического значения F именно в этой единственной точке. Получаем, что минимально допустимая скорость равна

$$v = \sqrt{\left(g - \frac{F}{m}\right)R} = 10 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Дорога, ведущая через холм, имеет вид наклонной плоскости с углом наклона α , плавно переходящей в дугу окружности радиусом R (рис.2). Известно, что на самой вершине холма имеется опасная выбоина. С какой минимальной скоростью должен ехать автомобиль, чтобы преодолеть холм не коснувшись его вершины?

Решение. Первый подход к решению задачи обычно состоит в том, чтобы найти такую скорость v_1 , при которой автомобиль проходит всю дугу, отрываясь от полотна дороги только в одной верхней точке A . Для этого записывают второй закон Ньютона для верхней точки в проекции на вертикальную ось AO , проходящую через центр окружности:

$$mg = \frac{mv_1^2}{R}, \text{ т.е. } v_1 = \sqrt{gR}. \quad (2)$$

Однако, как хорошо видно из уравнения (1), сила нормальной реакции в верхней точке минимальна. Тогда при скорости v_1 , при которой сила N в верхней точке равна нулю, в остальных точках дуги (где $\alpha \neq 0$) сила отрицательна! Это значит, что автомобиль оторвется от дороги не в верхней точке, а в точке B – сразу же после того, как перейдет с наклонной плоскости на криволинейный участок дороги.

Выясним, при какой минимальной скорости v_2 автомобиль в точке B оторвется от дороги (т.е. N обратится в ноль). Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось BO :

$$mg \cos \alpha = \frac{mv_2^2}{R}, \text{ т.е. } v_2 = \sqrt{gR \cos \alpha}. \quad (3)$$

Но при этой скорости автомобиль потеряет контакт с дорогой только в одной точке B , после чего проедет всю дугу с $N > 0$ (N возрастает при приближении к верхней точке).

Следовательно, надо найти такую скорость $v_3 > v_2$, при которой автомобиль, оторвавшись от дороги в точке B , свободно полетит под углом α к горизонту и приземлится в

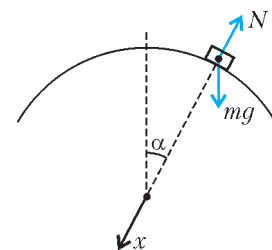


Рис. 1

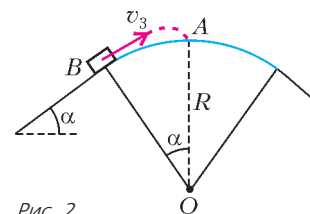


Рис. 2

точке A (см. рис.2) – точнее, чуть правее этой точки, чтобы не попасть в выбоину. Запишем уравнения кинематики:

$$R \sin \alpha = (v_3 \cos \alpha)t,$$

$$R(1 - \cos \alpha) = (v_3 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

После преобразований получим

$$v_3 = \sqrt{gR \frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \alpha}}.$$

Отметим, что эта скорость больше v_1 .

Задача 3. Тело брошено под углом к горизонту. Как меняется радиус кривизны траектории во время полета?

Решение. Чем дальше находится тело от верхней точки траектории, т.е. чем меньше его высота, тем больше радиус кривизны. Действительно, скорость тела по мере удаления от верхней точки возрастает, а нормальное ускорение $a_n = g \sin \alpha$ (α – угол между \vec{v} и \vec{g}) уменьшается, следовательно, $R = v^2/a_n$ увеличивается.

Задача 4. Небольшое тело массой $M = 190$ г лежит на вершине гладкой полусферы радиусом $R = 90$ см. В тело попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально, и застревает в нем. При какой минимальной скорости пули тело после этого сразу оторвется от поверхности полусферы?

Решение. Для того чтобы составное тело (тело с застрявшей в нем пулей) сразу и навсегда оторвалось от сферической поверхности, достаточно, чтобы радиус кривизны его траектории в верхней точке превышал радиус сферы. Дело в том, что при дальнейшем свободном полете тела радиус кривизны его траектории возрастает (см. задачу 3), а значит, траектория проходит вне сферической поверхности.

Запишем второй закон Ньютона для составного тела в верхней точке:

$$(m + M)g = (m + M) \frac{v^2}{R},$$

после чего с помощью закона сохранения импульса

$$mv_1 = (m + M)v$$

найдем скорость пули перед ударом:

$$v_1 = \frac{m + M}{m} \sqrt{gR} = 60 \text{ м/с}.$$

Задача 5. Самолет, летящий со скоростью $v = 540$ км/ч, наклоняется при повороте на угол α , тангенс которого равен 0,3. Чему равен радиус поворота?

Решение. На самолет при полете действуют сила тяги двигателей, сила лобового сопротивления, сила тяжести и подъемная сила, направленная перпендикулярно плоскости крыльев. Из них только подъемная сила может иметь горизонтальную составляющую, перпендикулярную плоскости полета, наличие которой необходимо для поворота в горизонтальной плоскости. Достигается это наклоном плоскости крыльев вокруг продольной оси самолета. Если плоскость крыльев повернется на угол α , то на такой же угол отклонится от вертикали подъемная сила \vec{N} (рис.3; вид спереди). Запишем второй закон Ньютона в проек-

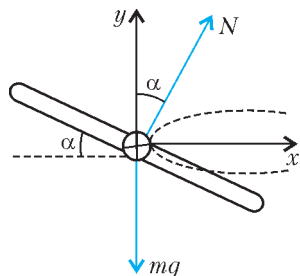


Рис. 3

циях на горизонтальную ось x , направленную к центру окружности, и на вертикальную ось y :

$$\begin{aligned} N \sin \alpha &= m \frac{v^2}{R}, \\ N \cos \alpha - mg &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Исключая силу N , получим

$$R = \frac{v^2}{g \tan \alpha} = 7500 \text{ м}.$$

Заметим, что при повороте надо обеспечить некоторое увеличение подъемной силы (от mg до $mg/\cos \alpha$), иначе самолет начнет опускаться. Это достигается специальным изменением формы крыльев.

Задача 6. С какой максимальной скоростью может проходить автомобиль поворот дороги с радиусом закругления $R = 100$ м, если коэффициент трения между шинами автомобиля и дорогой $\mu = 0,4$?

Решение. Автомобиль благополучно (в управляемом режиме) проходит поворот в том случае, если не возникает проскальзывания колес, т.е. действующая на нижнюю точку колеса сила трения покоя удовлетворяет неравенству $F_{\text{тр}} \leq \mu N$. При максимально допустимой скорости (движение на грани проскальзывания) это неравенство превращается в равенство. Если считать, что сила трения покоя – единственная горизонтальная сила, то она должна быть направлена по ускорению, т.е. к центру окружности. Получаем (рис.4,а)

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}} &= \frac{mv^2}{R}, \\ N - mg &= 0. \end{aligned}$$

Выразив отсюда $F_{\text{тр}}$ и N и подставив в условие начала проскальзывания $F_{\text{тр}} = \mu N$, найдем

$$v = \sqrt{\mu g R} = 20 \text{ м/с}.$$

Отметим, что если принять во внимание наличие силы сопротивления движению, направленной против скорости (эта сила отвечает за медленное торможение автомобиля при

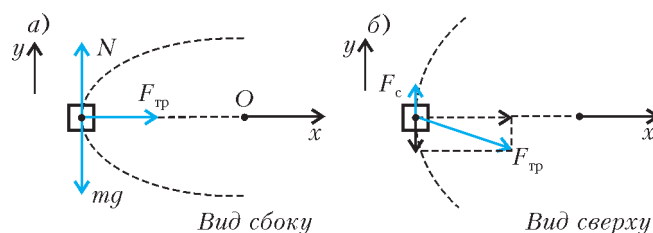


Рис. 4

движению по инерции – при выключенном двигателе и отключенных тормозах), то ответ несколько меняется. Для обеспечения равномерного движения на повороте часть силы трения покоя должна быть направлена вперед, создавая силу тяги, равную силе сопротивления движения. Тогда полная сила трения, равная при максимально допустимой скорости μmg , вычисляется по теореме Пифагора (рис.4,б):

$$(\mu mg)^2 = \left(\frac{mv^2}{R} \right)^2 + F_c^2.$$

Если, к примеру, для скорости порядка 20 м/с сила сопротивления $F_c = 0,2\mu mg$ (что означает, что при нажатии на тормоз ускорение торможения возрастет примерно в 5 раз по

сравнению с движением по инерции), то для максимальной скорости получим $v \approx 19,8$ м/с. Видим, что учет даже не столь уж маленькой силы сопротивления приводит к ничтожной поправке к максимально допустимой скорости.

Задача 7. Мотоциклист производит поворот на наклонном треке. Найдите максимальную и минимальную скорости прохождения поворота, если радиус поворота $R = 30$ м, коэффициент трения $\mu = 0,5$, а угол наклона трека к горизонту $\alpha = 45^\circ$. Поворот надо пройти без проскальзывания колес по треку.

Решение. Дорогу (трек) делают наклоненной в сторону поворота для того, чтобы сила нормальной реакции имела проекцию в направлении центра окружности. Это позволяет уменьшить боковую силу трения покоя (см. задачу 6) и опасность проскальзывания колес. При некоторой оптимальной для данного поворота скорости v_0 сила трения вообще обращается в ноль. Это значит, что боковое проскальзывание колес не возникает даже при существенном уменьшении коэффициента трения (например, за счет обледенения полотна дороги). Уравнения для нахождения v_0 имеют вид (рис.5, а)

$$N \sin \alpha = \frac{mv_0^2}{R},$$

$$N \cos \alpha - mg = 0.$$

Отсюда получаем

$$v_0 = \sqrt{gR \operatorname{tg} \alpha} \approx 17,3 \text{ м/с.}$$

При скоростях $v > v_0$ возникает сила трения покоя, направленная вдоль склона вниз (рис.5, б), а при достижении

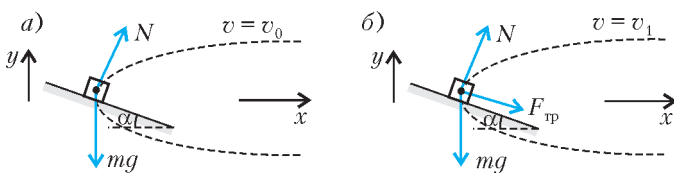


Рис. 5

максимально допустимой скорости v_1 начинается боковое скольжение колес наружу, вверх по склону. Начало скольжения описывается уравнениями

$$N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha = \frac{mv_1^2}{R},$$

$$N \cos \alpha - F_{\text{тр}} \sin \alpha - mg = 0,$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

откуда найдем

$$v_1 = \sqrt{gR \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}} = \sqrt{gR \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}} = 30 \text{ м/с.}$$

При скоростях $v < v_0$ возникает боковая сила трения покоя, направленная вверх по склону, а при достижении минимально допустимой скорости v_2 мотоциклист начинает соскальзывать вниз по склону. Меняя знаки перед силой трения в написанных выше уравнениях и решая их, получим

$$v_2 = \sqrt{gR \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}} = 10 \text{ м/с.}$$

При $\operatorname{tg} \alpha < \mu$ соскальзывания вниз не происходит при любой сколь угодно малой скорости, а при $\alpha = 0$ задача о проскальзывании наружу переходит в задачу 6. При $\operatorname{tg} \alpha > 1/\mu$ проскальзывания наружу не происходит ни при какой сколь угодно большой скорости. Если же при фиксированном угле

α устремить к нулю коэффициент трения, то обе скорости v_1 и v_2 приближаются с двух сторон к оптимальной скорости v_0 .

Задача 8. На внутренней поверхности сферы радиусом R находится маленькая шайба. До какой угловой скорости можно раскрутить сферу вокруг вертикальной оси, чтобы шайба не проскальзывала, находясь на расстоянии h ниже ее центра? Коэффициент трения между шайбой и сферой μ .

Решение. Аналогично предыдущей задаче, надо найти диапазон угловых скоростей $\omega_2 < \omega < \omega_1$, при которых шайба не проскальзывает ни вниз, ни вверх. Для начала проскальзывания наружу (вверх) уравнения имеют вид (рис. 6)

$$N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha = m\omega_1^2 (R \sin \alpha),$$

$$N \cos \alpha - F_{\text{тр}} \sin \alpha - mg = 0,$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где угол α определяется соотношением $\cos \alpha = h/R$. В уравнениях для нахождения минимальной угловой скорости ω_2 (начало проскальзывания вниз) надо изменить знаки перед силой трения. Решая уравнения, получим

$$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{g}{R \sin \alpha}\right) \operatorname{tg} \alpha + \mu}, \quad \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{g}{R \sin \alpha}\right) \operatorname{tg} \alpha - \mu}.$$

При $\mu \rightarrow 0$ обе граничные угловые скорости стремятся к оптимальной угловой скорости (при которой сила трения обращается в ноль)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R \cos \alpha}}.$$

Интересно отметить, что при $\alpha \rightarrow 0$ это выражение не обращается в ноль, а стремится к значению $\sqrt{g/R}$. При меньшей угловой скорости не существует устойчивого положения шайбы на поверхности гладкой вращающейся сферы, кроме нижней точки сферы.

Задача 9. На тонкой нити подвешен шарик массой m . Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают. Чему равно натяжение нити в тот момент, когда вектор ускорения шарика направлен горизонтально?

Решение. В начальный момент вектор ускорения шарика направлен вертикально вниз, а в нижней точке окружности – вертикально вверх. Следовательно, в каком-то промежуточном состоянии вертикальная составляющая ускорения должна изменить знак, т.е. обратиться в ноль. Запишем для этого момента второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось y и на ось x , проведенную от шарика к центру окружности вдоль нити (рис.7), и закон сохранения энергии:

$$T \cos \alpha - mg = 0,$$

$$T - mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{l},$$

$$mgl \cos \alpha = \frac{mv^2}{2},$$

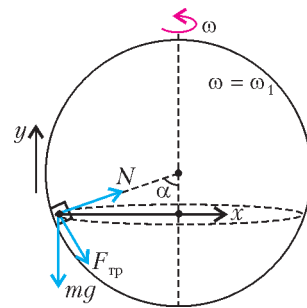


Рис. 6

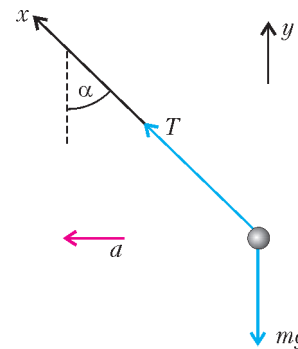


Рис. 7

где l – длина нити. Обратите внимание: ускорение направлено не к центру окружности, а горизонтально, но его проекция на радиальное направление (ось x) равна v^2/l . Решая уравнения, получаем

$$T = \sqrt{3}mg.$$

Напоследок мы рассмотрим несколько задач, в которых движение по окружности управляется не только механическими, но и электрическими, и магнитными силами.

Задача 10. На рисунке 8 показана схема устройства для предварительного отбора заряженных частиц для последующего отбора заряженных частиц для последующего исследования. Устройство представляет собой конденсатор, пластины которого изогнуты дугой радиусом $R = 50$ см. Предположим, что в промежуток между обкладками конденсатора из источника заряженных частиц (и.ч.) влетает электрон, как показано на рисунке. Напряженность электрического поля в конденсаторе по модулю равна $E = 500$ В/м. При каком значении скорости электрон пролетит сквозь конденсатор, не коснувшись его пластин? Считать, что расстояние между обкладками конденсатора мало, напряженность электрического поля в конденсаторе всюду одинакова по модулю, а вне конденсатора электрическое поле отсутствует.

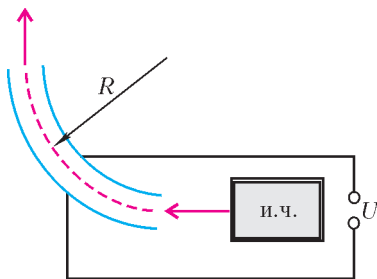


Рис. 8

Решение. Несмотря на громоздкость условия, эта задача, предлагавшаяся в последние годы в вариантах ЕГЭ, решается одним уравнением:

$$eE = \frac{mv^2}{R},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{eER}{m}} \approx 6,7 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Однако задачу решали правильно (точнее, вообще приступали к решению) очень немногие абитуриенты.

Задача 11. Четыре заряженные частицы массой m каждая с зарядами $q, -q, q, -q$ находятся в вершинах квадрата со стороной l . Вся система вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости квадрата и проходящей через его центр. Найдите угловую скорость вращения.

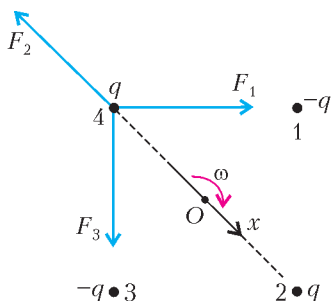


Рис. 9

Решение. Вычислим равнодействующую всех электрических сил, действующих на любую частицу, и запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x , проведенную к центру окружности (рис. 9):

$$k \frac{q^2}{l^2} \sqrt{2} - k \frac{q^2}{(l\sqrt{2})^2} = m\omega^2 \left(\frac{l\sqrt{2}}{2} \right),$$

откуда найдем

$$\omega = \sqrt{k \frac{q^2}{ml^2} \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}.$$

Задача 12. Маленький шарик с зарядом $q = 2$ мКл, подвешенный на длинной нити в горизонтальном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл, совершает колебания в плоскости, перпендикулярной вектору индукции. Силы натяжения нити при прохождении шариком нижней точки в разных направлениях отличаются на $\Delta T = 0,01$ Н. На сколько крайнее положение шарика выше нижнего?

Решение. Поскольку сила Лоренца не совершает работу, закон сохранения энергии имеет вид

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

и скорость шарика в нижней точке в обоих направлениях одна и та же. Отличие состоит в том, что при движении в одну сторону сила Лоренца направлена вертикально вниз, а в другую – вертикально вверх. Запишем второй закон Ньютона для каждого случая:

$$T_1 - mg - qvB = \frac{mv^2}{l},$$

$$T_2 - mg + qvB = \frac{mv^2}{l}.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим

$$\Delta T = 2qvB.$$

Выразив отсюда скорость и подставив в закон сохранения энергии, найдем

$$h = \frac{(\Delta T)^2}{8g(qB)^2} = 1,25 \text{ м}.$$

Упражнения

1. В цирковом аттракционе мотоциклист движется по внутренней поверхности сферы радиусом $R = 8,5$ м, оставаясь все время на $h = 5,1$ м выше центра сферы. При какой минимальной скорости это возможно? Коэффициент трения между колесами мотоцикла и поверхностью сферы $\mu = 0,92$.

2. На ракете массой $m = 5$ т, летящей в глубоком космосе со скоростью $v = 6$ км/с, для совершения поворота включают боковой реактивный двигатель. Скорость газов в реактивной струе $u = 2$ км/с, расход топлива $\mu = 10$ кг/с. По окружности какого радиуса происходит поворот?

3. Тяжелый шарик, подвешенный на нити длиной $l = 50$ см, совершает колебания в вертикальной плоскости. Крайнее положение шарика на $h = 20$ см выше нижнего. Во сколько раз максимальная сила натяжения нити в процессе движения больше, чем минимальная?

4. Три одинаковые звезды массой m каждая находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a и вращаются вокруг оси, перпендикулярной плоскости треугольника. Найдите угловую скорость вращения.

5. Шесть частиц массой m каждая с зарядами $q, -q, q, -q, q, -q$ находятся в вершинах правильного шестиугольника со стороной a . Вся система вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости шестиугольника и проходящей через его центр. Найдите угловую скорость вращения.

6. Грузик массой $m = 2$ г с зарядом $q = 4$ мКл, подвешенный на невесомой нити, находится в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 3$ Тл. Грузик дважды приводят во вращение в горизонтальной плоскости, причем радиусы вращения в обоих случаях одинаковы, а направления вращения противоположны. На сколько отличаются угловые скорости этих вращательных движений?