

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2-2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2169» или «Ф2175». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2171 и M2172 предлагались на региональном этапе XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи M2169–M2175, Ф2175–Ф2182

M2169. Каждая сторона остроугольного треугольника ABC меньше соответствующей стороны треугольника $A'B'C'$. Докажите, что $R < R'$, где R и R' – радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно.

П.Кожевников

M2170. Окружность пересекает график функции $y = x^3 - 2009x$ в шести точках. Найдите сумму абсцисс этих точек.

И.Богданов

M2171. Можно ли разбить при каком-то натуральном k все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

Н.Агаханов

M2172. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD , BE и CF , пересекающиеся в точке I . Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N . Докажите, что точки A , I , M и N лежат на одной окружности.

Д.Прокопенко

M2173. Пусть $p > 3$ – простое число, a и b – целые числа такие, что $a^2 + ab + b^2$ делится на p . Докажите, что $(a + b)^p - a^p - b^p$ делится: а) на p^2 ; б*) на p^3 .

Б.Лурье

M2174. а) Существуют ли четыре равных многоугольника таких, что любые два из них не имеют общих внутренних точек, но граничат по отрезку?

б) Тот же вопрос для четырех равных *выпуклых* многоугольников.

С.Маркелов

M2175. Пусть S – множество из n действительных чисел, лежащих в отрезке $[0; 1]$ ($n \geq 1$). Для некоторого k ($0 < k < n$) k -элементное подмножество A множества S называется *хорошим*, если разность между средним арифметическим k чисел, лежащих в A , и средним арифметическим $n - k$ чисел из S , не лежащих в A , не превосходит $\frac{n}{2k(n-k)}$. Докажите, что среди всех k -элементных подмножеств множества S доля хороших подмножеств составляет не менее $\frac{2}{n}$.

А.Бадзян

Ф2175. Шайба скользит по горизонтальной поверхности, сила трения о которую пропорциональна квадрату скорости шайбы. Начальная скорость шайбы упала вдвое через время T после начала движения. За какое время скорость упадет еще втрое?

А.Зильберман

Ф2176. Конструкция в виде буквы Г (рис.1) сделана из проволоки *постоянного сечения*, угол прямой, длина короткого куса в 4 раза меньше, чем длинного. Нити, на которых висит конструкция, вертикальны и одинаковы

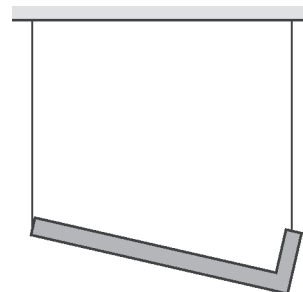


Рис. 1

по длине. Найдите отношение сил натяжения этих нитей.

З.Рафаилов

Ф2177. На корпусе фена, предназначенного для быстрой сушки волос, есть надпись: 1200 Вт. Диаметр отверстия, из которого выходит воздух с температурой 80°C , равен 4 см. Температура воздуха в комнате 20°C , давление воздуха 10^5 Па. С какой средней скоростью относительно корпуса фена движется выходящий наружу горячий воздух?

С.Варламов

Ф2178. Твердое вещество CO_2 похоже на плотно слепленный снежок – белый непрочный кусок скомканного снега – и называется «сухой лед», который при атмосферном давлении имеет температуру -65°C . Некоторое количество этого вещества взвесили и положили в нерастянутую резиновую оболочку воздушного шарика, имеющую массу 3 г. Оболочку загерметизировали, завязав узлом резиновую входную трубку шарика, дождалась, пока весь сухой лед испарился и нагрелся до комнатной температуры, а затем надутый шарик взвесили на тех же весах – получился результат 69 г. Что показывали весы при взвешивании твердого вещества?

С.Варламов

Ф2179. Нагреватель идеальной тепловой машины имеет начальную температуру $2T$, его теплоемкость C , температура холодильника в начальный момент T , его теплоемкость вдвое больше. Теплообмена с окружающей средой нет, машина имеет маленькую мощность даже при начальной разности температур. Найдите температуры тел через очень большое время. Какую работу может совершить машина за это очень большое время?

С.Муравьев

Ф2180. Конденсаторы в схеме (рис.2) одинаковые, емкость каждого 100 мкФ, сопротивление резистора 100 Ом. Батарею напряжением 12 В с малым внутренним сопротивлением подключают к этой схеме. Какое количество теплоты выделится за большое время в резисторе? Какое полное количество теплоты выделится при подключении батарейки?

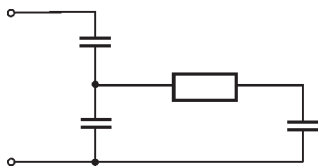


Рис. 2

А.Повторов

Ф2181. В однородном электрическом поле напряженностью E_0 удерживают диполь, состоящий из легкого жесткого стержня длиной d , на концах которого укреплены одинаковые маленькие шарики массой m каждый с зарядами q и $-q$. Найдите максимальную угловую скорость стержня после отпускания диполя. Сила тяжести отсутствует.

А.Простов

Ф2182. К последовательно соединенным катушке индуктивностью 1 Гн и конденсатору емкостью 1 мкФ подключают источник (рис.3), содержащий батарею

напряжением 1 В и идеальный диод. Через секунду после этого источник отключили от контура и подключили вновь, поменяв полярность (поменяли местами выводы А и Б), еще через секунду снова поменяли полярность – и так 100 раз. Найдите напряжение конденсатора через секунду после последнего переключения. Элементы цепи считать идеальными.

У.Былов



Рис. 3

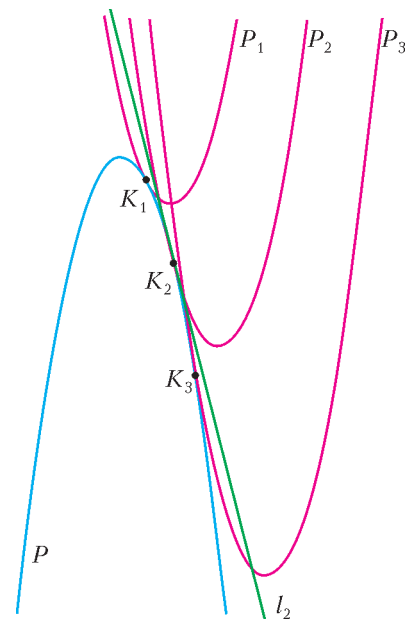
Решения задач M2146–M2152¹, Ф2160–Ф2167

M2146. На координатной плоскости нарисовали 2008 графиков квадратных трехчленов. Может ли оказаться, что для каждого из них существует прямая, имеющая общие точки с любым графиком, кроме него?

Ответ: может.

Приведем пример даже бесконечного множества парабол $P_1, P_2, P_3, \dots$, удовлетворяющих условию. Рассмотрим параболу P , заданную уравнением $y = -x^2$, и пусть парабола P_n симметрична параболе P относительно точки K_n с координатами $(n, -n^2)$, $n = 1, 2, \dots$

Каждая из парабол P_n имеет общую касательную l_n с параболой P (см. рисунок). Парабола P_n лежит выше прямой l_n и имеет с ней единственную общую точку K_n . Парабола P лежит ниже прямой l_n , в частности, все точки касания K_i , $i \neq n$, лежат строго ниже прямой l_n . Сдвинув немного вниз прямую l_n , получим такую прямую l'_n , что все точки K_i , $i \neq n$, по-прежнему лежат строго ниже нее, а точка K_n – строго выше нее. Тогда прямая l'_n не пересекает только одну параболу P_n из множества $P_1, P_2, P_3, \dots$



П.Кожевников

M2147. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано действительное число так, что все бесконечные в обе стороны горизонтальные и вертикальные последовательности чисел периодические. Докажите, что найдется бесконечно много горизонтальных последовательностей с различными наименьшими периодами тогда и только тогда, когда найдется бесконечно много вертикальных последовательностей с различными наименьшими периодами.

Допустим, что бесконечно много горизонтальных последовательностей с различными наименьшими перио-

¹Решение задачи M2153 будет опубликовано позже.

дами не найдется. Это означает, что существует такое конечное множество натуральных чисел $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$, что для всякой горизонтальной последовательности ее наименьший период совпадает с одним из T_i . Тогда $T = T_1 T_2 \dots T_k$ является периодом любой горизонтальной последовательности. Значит, клетчатая плоскость распадается на одинаковые вертикальные полосы шириной в T столбцов, т.е. существует не более T вертикальных последовательностей с различными наименьшими периодами (так как различных вертикальных последовательностей не более T).

Решение завершим, поменяв в предыдущих рассуждениях ролями вертикальные и горизонтальные последовательности.

Замечание. Читателям предлагается убедиться (это не очевидно!), что существуют расстановки действительных чисел, для которых все горизонтальные и вертикальные последовательности периодические, но найдется бесконечно много горизонтальных (и вертикальных) последовательностей с различными наименьшими периодами.

Е.Знак

М2148. По кругу выписаны числа $1, 2, 3, \dots, 100$ в некотором порядке. Петя вычислил 100 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшую из этих сумм. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

Ответ: 150.

Рассмотрим более общую задачу, заменив 100 на число n вида $6r + 4$, и покажем, что ответом будет число $\frac{3n}{2}$.

Выделим число n , а оставшиеся $n - 1 = 6r + 3$ числа разобьем на $2r + 1 = \frac{n-1}{3}$ троек соседних чисел.

Сумма чисел в этих трех тройках равна $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n}{2} \cdot \frac{n-1}{3}$, поэтому хотя бы в одной из рассматриваемых троек сумма чисел не больше $\frac{3n}{2}$.

Опишем пример, в котором в любой тройке сумма чисел будет не меньше чем $\frac{3n}{2}$. Разобьем числа $1, 2, \dots, n-1 = 6r+3$ на тройки чисел $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots, (a_{2r+1}, b_{2r+1}, c_{2r+1})$ с равной суммой следующим образом. (Заметим, что такое разбиение использовалось, например, при решении задачи М2068.) Пусть $b_1, b_2, \dots, b_{r+1}$ — это числа $1, 2, \dots, r+1$ в порядке возрастания, $b_{r+2}, \dots, b_{2r+1}$ — это числа $r+2, r+3, \dots, 2r+1$ в порядке убывания; $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$ — это числа $3r+2, 3r+3, \dots, 4r+2$ в порядке возрастания, $a_{r+2}, \dots, a_{2r+1}$ — это четные числа $4r+4, 4r+6, \dots, 6r+2$ в порядке возрастания; $c_1, c_2, \dots, c_{r+1}$ — это нечетные числа $4r+3, 4r+5, \dots, 6r+3$ в порядке убывания, $c_{r+2}, \dots, c_{2r+1}$ — это числа $2r+2, 2r+3, \dots, 3r+1$ в порядке убывания.

Отметим, что тройки сформированы таким образом, что последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{2r+1}$ возрастает, а

последовательность $c_1, c_2, \dots, c_{2r+1}$ убывает. Расставим числа на окружности в порядке $n, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_{2r+1}, b_{2r+1}, c_{2r+1}$. (Например, при $n = 22$ получается расстановка, изображенная на рисунке, и ответом в задаче будет число 33.) Оценим суммы троек последовательных чисел.

В каждой тройке вида (a_i, b_i, c_i) сумма чисел равна в точности $\frac{3n}{2}$. В тройке вида (b_i, c_i, a_{i+1}) (считаем также $n = a_{2r+2}$) сумма больше, чем в тройке (a_i, b_i, c_i) из-за возрастания последовательности $\{a_i\}$. Аналогично, в тройке вида (c_{i-1}, a_i, b_i) (считаем также $n = c_0$) сумма больше, чем в тройке (a_i, b_i, c_i) из-за убывания последовательности $\{c_i\}$. Остается тройка (c_{2r+1}, n, a_1) , сумма чисел которой равна $(2r+2) + n + (3r+2) > n + (3r+2) = \frac{3n}{2}$.

Замечание. Нетрудно посчитать, что среднее значение суммы трех последовательных чисел на окружности равно $\frac{3(n+1)}{2}$. При $n = 6r+4$ это дает оценку на 1 больше истинного ответа.

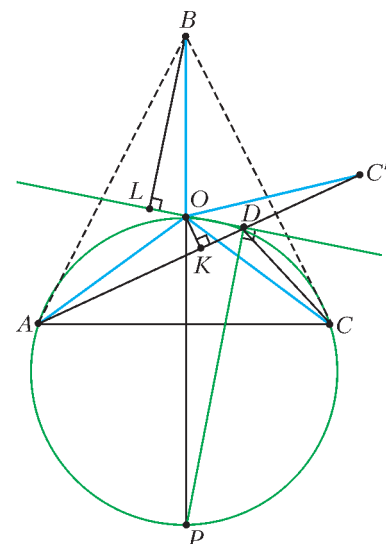
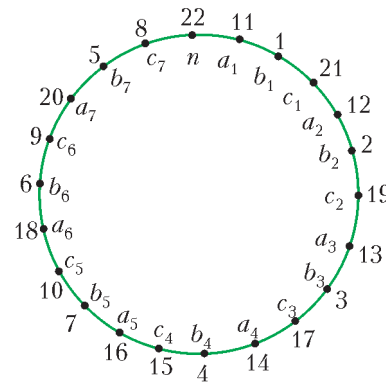
Интересно, какие результаты можно получить, если в исходной формулировке варьировать набор расставляемых чисел, менять тройки соседних чисел на четверки, пятерки, и т.д.

П.Кожевников

М2149. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что $\angle ADC = 2\angle ABC$. Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до внешней биссектрисы угла ADC , равно $AD + DC$.

Пусть описанная окружность треугольника ADC пересекает высоту треугольника ABC , проведенную из точки B , в точках O и P , причем O лежит внутри треугольника ABC (см. рисунок). Из симметрии O и P — середины дуг AC (и OP — диаметр), поэтому $\angle ADP = \angle CDP$, т.е. DP — биссектриса угла ADC . Поскольку угол PDO опирается на диаметр, то он прямой, значит, DO — внешняя биссектриса угла ADC .

Заметим, что $\angle AOC = \angle ADC = 2\angle ABC$ и $AO = OC$, поэтому точ-



ка O является центром описанной окружности треугольника ABC .

Пусть для определенности $AD \geq CD$. Пусть K – проекция точки O на AD , L – проекция точки B на OD , C' – точка, симметричная точке C относительно OD . Так как OD – внешняя биссектриса, то C' лежит на продолжении отрезка AD за точку D .

Из симметрии $AC' = AD + DC' = AD + CD$ и $OC' = OC$. Но поскольку $OA = OC$, треугольник OAC' – равнобедренный, значит, $AK = \frac{AC'}{2} = \frac{AD + CD}{2}$. (Это рассуждение практически совпадает с решением задачи М1000 «Задачника «Кванта».) Теперь для завершения решения достаточно установить равенство отрезков BL и AK .

Имеем $\angle AOK = 90^\circ - \angle OAD = 90^\circ - \angle OPD = \angle POD = \angle BOL$. Получаем, что прямоугольные треугольники AOK и BOL равны по гипотенузе ($AO = OB$, так как O – центр описанной окружности треугольника ABC) и острому углу. Следовательно, $BL = AK$, что и требовалось.

П. Кожевников

М2150. В стране Леонардии все дороги – с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго.

Пусть $n(A)$ – число жителей города A , а $f(A)$ – суммарное население городов, дороги из которых входят в A , минус суммарное население городов, в которые выходят дороги из A . Если утверждение задачи неверно, то $f(A) < 0$ для каждого города A . Тогда сумма S чисел $n(A)f(A)$ по всем городам страны отрицательна. С другой стороны, рассмотрим любую дорогу из города X в город Y . В число $n(Y)f(Y)$ эта дорога вносит «вклад» $+n(Y)n(X)$, а в число $n(X)f(X)$ – «вклад» $-n(X)n(Y)$. Сумма S получается в результате сложения «вкладов» всех дорог, поэтому $S = 0$. Противоречие.

Замечание. Отметим, что в решении мы использовали лишь тот факт, что величина «количество жителей города» положительна. Чтобы оно было целым, не требуется.

Н. Гравин

М2151. Числовой треугольник

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
 \end{array}$$

составлен по следующему правилу. В первой строке одно число, равное 1. В k -й строке ($k = 2, 3, \dots$)

записывается $2k - 1$ чисел, каждое из которых равно сумме трех чисел: числа, стоящего над ним и двух его соседей в предыдущей строке (если некоторых из таких трех чисел нет, то они считаются равными 0). Докажите, что в среднем столбце не встретится чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.

Пусть $a_n^0, a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^{2n}$ – $(n + 1)$ -я строка треугольника, при этом a_n^i – число из среднего столбца. Положим также $a_n^i = 0$, если $i < 0$ или $i > 2n$. Тогда из условия задачи $a_{n+1}^i = a_n^i + a_n^{i-1} + a_n^{i-2}$.

Докажем индукцией по n , что a_n^i равно коэффициенту при x^i (после приведения подобных слагаемых) в многочлене $(x^2 + x + 1)^n$. Это верно для $n = 0$. Предположив, что это верно для чисел из k -й строки, имеем

$$\begin{aligned}
 (x^2 + x + 1)^{k+1} &= (x^2 + x + 1)^k (x^2 + x + 1) = \\
 &= (a_k^{2k} x^{2k} + a_k^{2k-1} x^{2k-1} + \dots + a_k^1 x + a_k^0) (x^2 + x + 1) = \\
 &= a_k^{2k} x^{2k+2} + (a_k^{2k} + a_k^{2k-1}) x^{2k+1} + \\
 &+ (a_k^{2k} + a_k^{2k-1} + a_k^{2k-2}) x^{2k} + \\
 &+ (a_k^{2k-1} + a_k^{2k-2} + a_k^{2k-3}) x^{2k-1} + \dots + (a_k^1 + a_k^0) x + a_k^0 = \\
 &= a_{k+1}^{2k+2} x^{2k+2} + a_{k+1}^{2k+1} x^{2k+1} + \dots + a_{k+1}^1 x + a_{k+1}^0,
 \end{aligned}$$

т.е. утверждение верно и для чисел из $(k + 1)$ -й строки.

Итак, число a_n^n равно коэффициенту при x^n в многочлене $(x^2 + x + 1)^n$. Но у многочленов $(x^2 + x + 1)^n$ и $(x^2 + x + 1 - 3x)^n = (x - 1)^{2n}$ соответствующие коэффициенты дают равные остатки при делении на 3. Так как $(x - 1)^{2n} = x^{2n} - C_{2n}^1 x^{2n-1} + \dots + (-1)^n C_{2n}^n x^n + \dots + 1$ (где $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$), то $a_n^n \equiv (-1)^n C_{2n}^n \pmod{3}$.

Для завершения решения остается доказать утверждение: число $K_n = (-1)^n C_{2n}^n$ не дает остаток 2 при делении на 3. Воспользуемся индукцией по n . При $n = 1$ утверждение верно. Докажем утверждение для числа K_n , предположив, что оно верно для всех K_i , где $i < n$.

Предположим вначале, что n не делится на 3. Имеем $K_n = -K_{n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n)}{n^2}$, или $nK_n = -2(2n-1)K_{n-1} \equiv (2n-1)K_{n-1} \pmod{3}$. Если $n \equiv 1 \pmod{3}$, то $K_n \equiv K_{n-1} \pmod{3}$; если же $n \equiv -1 \pmod{3}$, то $-K_n \equiv -3K_{n-1} \equiv 0 \pmod{3}$, т.е. $K_n \equiv 0 \pmod{3}$.

Пусть теперь n делится на 3, $n = 3m$. Тогда

$$\begin{aligned}
 K_n &= (-1)^{3m} C_{6m}^{3m} = \\
 &= (-1)^m \frac{(3m+1)(3m+2)(3m+3)\dots(6m-2)(6m-1)(6m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (3m-2)(3m-1)(3m)}.
 \end{aligned}$$

(*)

Положим $A = (3m+1)(3m+2)(3m+4)(3m+5) \dots$

... $(6m-2)(6m-1)$ (произведение чисел, не делящихся на 3, из отрезка $[3m+1; 6m]$), $B = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3m-2)(3m-1)$ (произведение чисел, не делящихся на 3, из отрезка $[1; 3m]$); ясно, что $A = B + 3C$ для некоторого натурального C . Сократив в дроби (*) каждый третий сомножитель на 3, получаем

$$K_n = \frac{A}{B} \cdot (-1)^m \frac{(m+1)(m+2)\dots(2m)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = \frac{A}{B} \cdot (-1)^m C_{2m}^m = \frac{A}{B} K_m,$$

$$BK_n = AK_m = (B+3C)K_m,$$

и, следовательно,

$$BK_n - BK_m = B(K_n - K_m) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Так как B не делится на 3, то $(K_n - K_m) \equiv 0 \pmod{3}$, или $K_n \equiv K_m \pmod{3}$. Нужно утверждение доказано по индукции.

И. Богданов

M2152*. Пара (p, q) различных простых чисел называется особой, если существует a , представимое в виде $a = x^p + y^p = z^q + t^q$ для некоторых натуральных x, y, z, t , но не представимое в виде $u^{pq} + v^{pq}$, где u и v – натуральные числа. Докажите, что любое простое число p входит в бесконечное число особых пар.

Пусть $p = 2, q = 2t + 1$. Имеем $2 \cdot 5 = 1 + 3^2$, поэтому для $a = 2 \cdot 5^q$ имеем

$$a = (5^t)^2 + (3 \cdot 5^t)^2 = 5^q + 5^q.$$

Если предположить, что указанное a представимо в виде $u^{2q} + v^{2q}$, то u и v нечетные, одновременно не равные 1, значит, $a = 2 \cdot 5^q \geq 3^{2q} + 1 > 9^q$ и $2 > \left(\frac{9}{5}\right)^q > \frac{9^2}{5^2}$ – противоречие. Таким образом, для любого простого нечетного q пара $(2, q)$ – особая.

Применим сходные рассуждения и в случае, когда $p > 2$ и $q > 2$. Положим $2A = 1 + 3^p$ (нетрудно видеть, что $2A \equiv 4 \pmod{8}$), значит, A делится на 2, но не делится на 4). Числа $1 \cdot q, 2 \cdot q, 3 \cdot q, \dots, (p-1) \cdot q$ дают различные ненулевые остатки при делении на p (действительно, если xq и yq дают равные остатки при делении на p , то $xq - yq = (x - y)q$ делится на p , и значит, $x - y$ делится на p). Поэтому можно взять $\alpha \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ такое, что αq дает остаток 1 при делении на p , т.е. $\alpha q = 1 + \beta p$ для некоторого натурального β . Положим $a = 2B^q$, где $B = A^\alpha$. Тогда

$$a = (A^\beta)^p + (3A^\beta)^p = B^q + B^q.$$

Теперь для решения задачи достаточно доказать, что для каждого $\alpha \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ число $2B^q$ не представляется в виде $u^{pq} + v^{pq}$ при достаточно больших q .

Предположим, что равенство $2B^q = (u^p)^q + (v^p)^q$ верно, и $u \geq v$. В разложение числа u^p на простые множители двойка входит в степени 0 или в степени, не меньшей p , а в разложение числа $B = A^\alpha$ – в степени $\alpha \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, поэтому $u^p \neq B$. Получаем $u^p > B$,

и значит, $2 > \left(\frac{u^p}{B}\right)^q \geq \left(\frac{B+1}{B}\right)^q$, откуда $q < \log_{\frac{B+1}{B}} 2$.

Итак, при $q > \log_{\frac{B+1}{B}} 2$ число $2B^q = 2A^{\alpha q}$ не представляется в виде $u^{pq} + v^{pq}$.

Замечание. Окончание рассуждения фактически состояло в доказательстве утверждения: уравнение

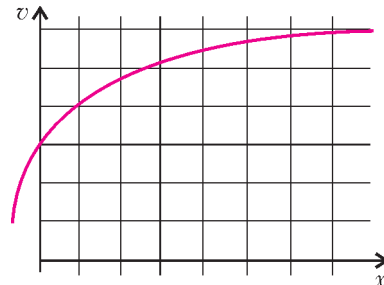
$$2B^2 = x^2 + y^2,$$

где B – натуральное, имеет конечное число решений в натуральных x, y, z с различными x и y . Известно (см. по этому поводу решение задачи M2025), что ни при каком натуральном B никакая тройка $(x, y, 3)$ решением этого уравнения не является. Значит, любая пара $(p, 3)$, где $p > 3$, – особая (это нетрудно доказать и непосредственно).

Выше мы видели, что и любая пара $(p, 2)$, где $p > 2$, – особая. На самом деле, особой является и любая пара различных простых p и q , где $p > q \geq 5$, однако элементарное доказательство этого факта автору неизвестно. Неэлементарное основано на следующем факте: при любом фиксированном целом $q > 3$ на кривой $x^q + y^q = 2$ лежит конечное число рациональных точек. Представление о доказательстве этого факта можно получить из книги Н. Васильева и др. «Заочные математические олимпиады» (М.: Наука, 1987, с. 36). Этот факт означает, что множество $M = \{(x, y, z)\}$ троек взаимно простых чисел таких, что $x^q + y^q = 2z^q$, при $q > 3$ конечно. Рассмотрим число $Q = 8t + 3$, кратное произведению всех нечетных делителей таких чисел z ; положим $2A_1 = 1 + Q^p$. Предположим, что $2B_1^q = u^{pq} + v^{pq}$, где $B_1 = A_1^\alpha$. Тогда $u^p = kx$, $v^p = ky$, $B_1 = kz$, где $(x, y, z) \in M$. Из построения Q ясно, что $z = 2^m$, где $m \geq 0$. Отсюда нетрудно вывести (см. решение задачи M 2108), что $x = y$, а значит, $u = v$. Рассуждая, как в решении задачи, можно привести последнее равенство к противоречию.

В. Сендеров

Ф2160. На графике (см. рисунок) приведена зависимость скорости точки, которая движется по оси координат X , в зависимости от ее координаты. Найдите ускорение точки в начале координатной оси и время прохождения первых пяти метров. Одна клетка по горизонтальной оси – это 1 м, по вертикальной оси – это 1 м/с.



Решение будет приближенным – график довольно «мелкий», построения получаются не слишком точными. По графику скорость точки в начальный момент равна $v_0 = 3$ м/с, а скорость возрастания нарисованной кривой в районе начальной точки графика составляет примерно $\Delta v / \Delta x = 1,5$ м/с на 1 м (для получения этого значения

удобно построить касательную к графику). За малый интервал времени Δt точка проедет $v_0 \Delta t$ (за очень малый интервал времени скорость изменится незначительно, и для нахождения смещения можно считать ее постоянной). При этом скорость изменится на $(\Delta v / \Delta x) v_0 \Delta t$. Ускорение найдем, разделив эту величину на Δt . Получим

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta x} v_0 = 4,5 \text{ м/с}^2.$$

З.Точкин

Ф2161. Статуэтка школьника имеет массу 20 г, голова статуэтки сделана из серебра (плотность 12 г/см^3), остальное – из дерева (плотность $0,8 \text{ г/см}^3$). Известно, что фигурка не содержит полостей и не тонет в воде. Один грамм дерева стоит 1 рубль, один грамм серебра стоит 100 рублей. Сколько может стоить эта фигурка?

Справка: данная статуэтка художественной ценности не имеет, ее стоимость равна стоимости материалов.

Чем меньше серебра в статуэтке, тем она дешевле. Если серебра там совсем мало, то она стоит чуть больше 20 рублей – это минимальная величина. Но серебра не может быть и очень много – по условию статуэтка не тонет в воде. Максимальная цена получится при максимальном количестве серебра – в этом случае средняя плотность статуэтки равна плотности воды и объем статуэтки составляет 20 см^3 . Обозначим массу серебра через m , тогда масса дерева $(20 - m)$ и полный объем статуэтки равен

$$\frac{m}{12} + \frac{20 - m}{0,8} = 20.$$

Отсюда $m = 4,3 \text{ г}$, и цена статуэтки 445,7 рублей.

Итак, стоимость статуэтки находится в пределах от 20 до 445,7 рублей.

А.Несложнов

Ф2162. В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде находится порция гелия, отделенная от окружающей среды массивным поршнем, который может двигаться без трения. Наружное давление очень быстро повышают в 3 раза. Во сколько раз уменьшится объем газа к тому моменту, когда поршень окончательно перестанет двигаться?

Будем считать сосуд теплоизолированным, а теплоемкости стенок сосуда и поршня – пренебрежимо малыми. Если начальное давление газа было p , то, когда поршень окончательно остановится, давление газа будет $3p$. Для начального момента уравнение состояния идеального газа дает

$$pV_1 = \nu RT_1,$$

для конечного –

$$3pV_2 = \nu RT_2.$$

Если теплообмена не было, то внутренняя энергия газа увеличилась за счет работы внешних сил, которая равна $p_{\text{внеш}}(V_1 - V_2)$. Тогда получаем

$$3p(V_1 - V_2) = \frac{3}{2}(\nu RT_2 - \nu RT_1) = \frac{3}{2}(3pV_2 - pV_1).$$

Отсюда находим искомое уменьшение объема:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}.$$

А.Повторов

Ф2163. В глубинах космоса, вдали от других тел и полей неподвижно висит непроводящее тонкое кольцо радиусом R и массой M , равномерно заряженное по длине зарядом Q . Заряженное таким же зарядом маленькое тело массой m движется вдоль оси кольца, причем на большом расстоянии от кольца скорость тела направлена к кольцу и равна v_0 . Найдите максимальную скорость кольца.

Если скорость налетающего тела v_0 достаточна, чтобы пролететь сквозь кольцо, то максимальная скорость кольца получится в тот момент, когда тело находится в плоскости кольца (в его центре). Запишем уравнения сохранения импульса и энергии для системы тело-кольцо в этом случае:

$$mv_0 = mv + Mu, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + \frac{kQ^2}{R}.$$

Исключая из этих уравнений величину v скорости тела, получим квадратное уравнение относительно скорости u кольца. Учитывая, что эта скорость должна быть меньше скорости тела, получим

$$u = \frac{mv_0}{M + m} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2kQ^2(M + m)^2}{RMm^2v_0^2}} \right).$$

Если тело не сможет пролететь через кольцо, то максимальная скорость кольца получится после того, как тело «отразится» от кольца и улетит назад очень далеко. В этом случае энергия взаимодействия зарядов окажется малой, и мы получим известную формулу для скорости кольца после абсолютно упругого удара:

$$u = \frac{2mv_0}{M + m}.$$

Условие для пролета тела через кольцо следующее: минимальная скорость тела v_1 на бесконечности получится при равенстве скоростей тела и кольца при положении тела в центре кольца и составит

$$v_1 = \sqrt{\frac{2kQ^2(M + m)}{RMm}}.$$

А.Зильберман

Ф2164. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает со скоростью $\vec{v}$ частица массой m и зарядом q . Магнитное поле локализовано внутри области радиусом R_0 , скорость $\vec{v}$ направлена перпендикулярно линиям магнитной индукции, прицельный параметр удара p (рис. 1). Найдите угол рассеяния θ , т.е. угол, на который частица отклоняется

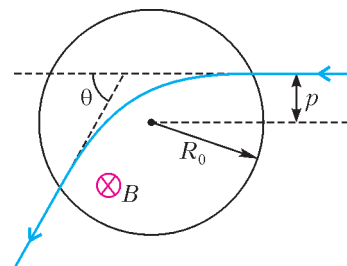


Рис. 1

(Продолжение см. на с. 34)

Цепные дроби вокруг нас

- Всякое рациональное число p/q можно представить в виде конечной *цепной дроби*

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, \dots, a_n].$$

Числа, входящие в цепную дробь, называются *неполными частными*, из них $a_1, \dots, a_n$ – натуральные, a_0 – целое. Иррациональные числа разлагаются в бесконечные цепные дроби.

- Обрывая цепную дробь, можно получать очень хорошие рациональные приближения к данному числу, которые называются *подходящими дробями* (нумерация подходящих дробей, как и неполных частных, начинается с нуля). Для числа

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$$

с древних времен известны приближения

$$\frac{22}{7} = [3; 7] \text{ и } \frac{355}{113} = [3; 7, 15, 1].$$

При этом

$$\left| \pi - \frac{22}{7} \right| < 2 \cdot 10^{-2}, \quad \left| \pi - \frac{355}{113} \right| < 3 \cdot 10^{-7}.$$

- *Квадратичные иррациональности* (иррациональные корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами), и только они, раскладываются в *периодические* цепные дроби. Например (черта отмечает период),

$$\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, \dots] = [2; \overline{4}],$$

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 6}].$$

- Если, разорвав прямоугольный лист бумаги пополам, мы хотим получить два новых листа с тем же отношением сторон, то стороны исходного листа должны относиться друг к другу как $\sqrt{2} : 1$. Именно таким свойством обладают форматы бумаги серии А ($A_0, A_1, \dots$). Размеры стандартного листа бумаги А4 – 210×297 мм. Их отношение

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70} = [1; 2, 2, 2, 2]$$

есть пятая подходящая дробь к числу $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$. Разница между ними на глаз не заметна:

$$\left| \sqrt{2} - \frac{297}{210} \right| < 10^{-4}.$$

Произведение сторон листа (в метрах) мало отличается от $1/16$:

$$\left| 0,297 \cdot 0,210 - \frac{1}{16} \right| < 2 \cdot 10^{-4}.$$

Это связано с тем, что лист А4 составляет $1/2^4 = 1/16$ от ватманского листа А0, площадь которого равна 1 м^2 .

- Отношение напряжений в трехфазных электрических сетях

$$\frac{380}{220} = \frac{19}{11} = [1; 1, 2, 1, 2],$$

$$\frac{220}{127} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 3, 2]$$

– это хорошие приближения к числу

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; \overline{1, 2}].$$

- Подходящие дроби к длине солнечного года, измеренного в солнечных сутках, –

$$365,24219 \dots = [365; 4, 7, 1, 3, 5, \dots]$$

– позволяют строить календарные стили.

Первая подходящая дробь $365\frac{1}{4}$ соответствует *юлианскому стилю*, в котором каждый четвертый год – високосный. В средние века от него отказались, поскольку он дает заметную ошибку: 11 минут 14 секунд в год.

Третья подходящая дробь $[365; 4, 7, 1] = 365\frac{8}{33}$ лежала в основе *персидского календаря*, который в 1079 году предложил математик, астроном и поэт Омар Хайям. Такой календарь за год ошибается на 19 секунд. В нем все годы разбиты на 33-летние циклы, внутри цикла семь раз високосным считается каждый четвертый год, а на восьмой раз – пятый.

Календарь, основанный на следующем (четвертом) приближении $[365; 4, 7, 1, 3] = 365\frac{31}{128}$, предлагался астрономом Иоганном Генрихом Медлером в 1864 году. Он не был принят, хотя за год давал бы ошибку всего в одну секунду.

Мы живем по *григорианскому стилю*, использующему приближение $365\frac{97}{400}$. Этот календарь ошибается примерно на 27 секунд в год.

- Голландский ученый Христиан Гюйгенс в 1862 году построил один из первых механических планетариев. Теорию цепных дробей он применил при проектировании зубчатых колес, что обеспечило высокую точность во взаимном движении моделей планет.

- В ботанике известно явление *филлотаксиса* – спиралевидного расположения листьев, колючек, чешуек, семян, ... Если посчитать количество спиралей, закручивающихся в одну и в другую стороны, то, как правило, получатся два соседних числа *Фибоначчи*, т.е. числа из последовательности

$$\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\},$$

в которой

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Так, на сосновой шишке есть 3 спирали, закручивающиеся в одну сторону, и 5 – в другую. На еловой – 5 и 8 спиралей соответственно, на кедровой – 8 и 13. Отношения соседних чисел Фибоначчи раскладываются в очень простые цепные дроби, например,

$$\frac{5}{3} = [1; 1, 1, 1], \quad \frac{8}{5} = [1; 1, 1, 1, 1].$$

Это подходящие дроби к числу, называемому *золотым сечением*:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = [1].$$

Расположение листьев по таким спиральям позволяет растениям получать наибольшее количество солнечных лучей.

• На рисунках 1 и 2 изображен «чертеж» сосновой шишки.

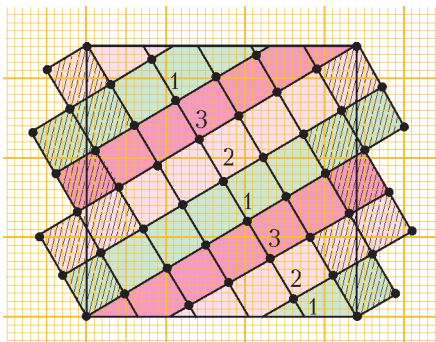


Рис. 1

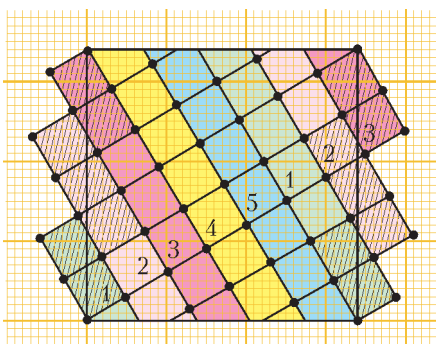


Рис. 2

Представьте, что эти квадраты вырезаны из бумаги и склеены в цилиндры (левая сторона склеена с правой, а заштрихованные квадраты одного цвета наклеены друг на друга). Тогда повернутые квадраты будут располагаться на цилиндре так же, как располагаются чешуйки на сосновой шишке. На рисунке 1 видно 3 спирали, закрученные в одну сторону, а на рисунке 2 – 5 спиралей, закрученных в другую. Попробуйте нарисовать «чертеж» еловой шишки с 5 и 8 спиральями. Воспользуйтесь для этого миллиметровой бумагой, вам понадобится квадрат 89×89 .

• Со времен Баха в музыке используется *равномерно темперированная шкала*, содержащая 12 полутонов в каждой октаве. Если струна длины l (при заданном натяжении) издает звук «до» первой октавы, соответствующий частоте f , равной 512 колебаниям в секунду, то струна длиной $\frac{2}{3}l$ (на струнных инструментах эта длина получается нажатием пальца в соответствующем месте) издает звук, имеющий частоту $\frac{3}{2}f$ (натуральная квинта), а струна длиной $\frac{1}{2}l$ издает звук, имеющий частоту $2f$ (октава). Наше ухо при сравнении двух звуков улавливает не отношение их частот, а логарифм этого отношения. Естественней всего брать двоичный логарифм, чтобы интервал в одну октаву измерялся как единица:

$$\log_2 \frac{2f}{f} = 1.$$

Почему же возникло деление октавы именно на 12 интервалов? Чтобы октава и натуральная квинта по возможности более точно укладывались в одну и ту же *равномерную* темперацию (деление октавы на равные по слуху интервалы), октаву нужно поделить на столько частей, чтобы число $\log_2 \frac{3}{2}$ хорошо приближалось дробью с выбранным знаменателем. Подходящими дробями к числу

$$\log_2 \frac{3}{2} = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, \dots]$$

будут дроби

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \dots$$

Приближения 1 и $1/2$ слишком грубые. Приближение $3/5$ соответствует *пентатонике*, существовавшей у народов Востока, а приближение $7/12$ – самое удачное. Погрешность

$$\left| \log_2 \frac{3}{2} - \frac{7}{12} \right| < 2 \cdot 10^{-3}$$

на слух неразличима.

Что читать в «Кванте» о цепных дробях

1. А.Бендукидзе. *Золотое сечение*. – №8 за 1973 г.
2. Н.Бескин. *Бесконечные цепные дроби*. – №8 за 1970 г.
3. Н.Бескин. *Цепные дроби*. – №1 за 1970 г.
4. А.Бялко. *Физика музыкальной гармонии*. – №5 за 1987 г.
5. Ю.Нестеренко, Е.Никишин. *Очерк о цепных дробях*. – №5–6 за 1983 г.
6. А.Прохоров. *Золотая спираль*. – №9 за 1984 г.
7. Ж.Раббот. *Знаете ли вы, что $\frac{220}{127} \approx \sqrt{3}$?* – №11 за 1978 г.
8. Д.Фукс, М.Фукс. *О наилучших приближениях*. – №6 за 1971 г.

Материал подготовил А.Устинов

(Начало см. на с. 26)

от первоначального направления после прохождения магнитного поля.

В однородном магнитном поле на движущуюся заряженную частицу действует сила Лоренца $\vec{F}_L$. Эта сила постоянна по модулю: $F_L = qvB$, всегда направлена перпендикулярно скорости движения частицы и сообщает частице центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$. Закон движения частицы по окружности можно записать в виде

$$\frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{m},$$

что позволяет найти радиус искомой окружности:

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Итак, при входе в магнитное поле частица начинает двигаться по окружности радиусом R . Требуется найти угол θ по заданным величинам R , R_0 , p . Видим (рис.2), что частица движется по дуге окружности, центр A которой находится на прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной первоначальному направлению движения частицы.

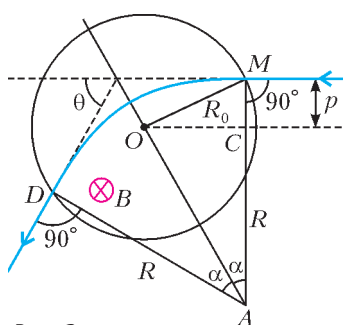


Рис. 2

При этом траектория движения частицы симметрична относительно прямой AO , проходящей через центры обеих окружностей. Более точно – по линии AO проходит плоскость симметрии, т.е. правая (от AO) половина нашего чертежа является зеркальным отражением левой. Отсюда следует, что угол OAM равен углу OAD – на рисунке эти углы обозначены α . Искомый угол θ и угол $DAM = 2\alpha$ равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Таким образом, $\theta = 2\alpha$.

Найдем угол α . Сначала из прямоугольного треугольника CMO находим величину отрезка OC :

$$OC = \sqrt{R_0^2 - p^2},$$

затем из прямоугольного треугольника ACO находим угол α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OC}{AC} = \frac{\sqrt{R_0^2 - p^2}}{R - p}, \text{ или } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{R_0^2 - p^2}}{R - p}.$$

Окончательно получаем

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{R_0^2 - p^2}}{R - p}, \text{ где } R = \frac{mv}{qB}.$$

Заметим, что в физике задачи, рассматривающие столкновение движущегося тела (частицы) с мишенью и изменение направления движения тела после столкновения встречаются довольно часто. Самый известный пример – формула Резерфорда, связывающая угол

рассеяния с параметром удара при кулоновском взаимодействии движущейся заряженной частицы с неподвижным заряженным ядром атома. В нашей задаче такой мишенью, с которой сталкивается заряженная частица, является локализованное магнитное поле. Подобные задачи имеются в астрофизике, когда рассматривается диффузия заряженных частиц в магнитных неоднородностях космической среды.

Ю.Носов

Ф2165. Вольтметр и миллиамперметр соединили последовательно и подключили к батарее. При этом показания приборов были 1,3 В и 0,5 мА. Теперь соединили последовательно два таких же вольтметра и тот же миллиамперметр и подключили к той же батарее – один из вольтметров показал 0,7 В. Что показывают при этом остальные два прибора? А что покажут приборы, если количество вольтметров увеличить до трех? Напряжение батарейки постоянно.

Понятно, что второй вольтметр покажет тоже 0,7 В, а показания миллиамперметра уменьшатся в $1,3/0,7$ раз (во столько раз уменьшился ток через вольтметр) и составят $0,5 \text{ мА} / (13/7) = 7/26 \text{ мА} \approx 0,27 \text{ мА}$.

Ток в цепи при подключении второго вольтметра уменьшился в $13/7$ раз, во столько же раз увеличилось полное сопротивление цепи – отсюда сразу видно, что сопротивление вольтметра в 6 раз больше сопротивления миллиамперметра. При добавлении третьего вольтметра полное сопротивление цепи по сравнению с начальным увеличится в $19/7$ раз, тогда показания миллиамперметра будут $7/38 \text{ мА} \approx 0,18 \text{ мА}$, а показания каждого вольтметра составят примерно 0,48 В.

А.Простов

Ф2166. DVD-диск вращается очень быстро. Оцените скорость движения точки поверхности диска мимо считывающего устройства, если за 100 секунд считывается 100 миллионов бит информации. Дорожки, на которых записана информация, расположены очень близко друг к другу – расстояние между соседними дорожками составляет примерно $1/1000$ миллиметра.

Тут получится довольно грубая оценка. Будем считать, что 1 бит на диске передает область размера $1/1000 \text{ мм}$ на $1/1000 \text{ мм}$ (как расстояние между соседними дорожками). Тогда длина дорожки на 100 миллионов бит составит 100 метров, и скорость считывания будет 10 м/с .

Р.Цифров

Ф2167. В фокус маленькой собирающей линзы помещают мощный точечный источник света, при этом на линзу действует очень маленькая сила F . Какой станет эта сила, если источник отодвинуть вдвое дальше? А второе дальше? Диаметр линзы в 10 раз меньше ее фокусного расстояния.

Световое давление очень мало, поэтому упомянутый в задаче эффект совершенно незначителен. Тем не менее, модель расчета предложена. Попробуем посчитать.

Пусть источник испускает во все стороны фотоны, будем считать их энергии одинаковыми, тогда импульсы их также равны по величине. Фотоны падают на линзу из ее фокуса под различными углами, проекция импульса одного фотона на направление главной оптической оси равна $p \cos \varphi$. Далее пучок фотонов движется параллельно главной оптической оси линзы – сила направлена в сторону источника. Эта сила определяется числом фотонов и разностью импульсов падающих фотонов и «прошедших сквозь линзу», т.е. получится множитель $(1 - \cos \varphi_1) - 1$, где нужно взять «средний угол». Его можно положить для этого случая равным $0,5 \arctg(0,25d/F)$. Если мы увеличим расстояние до источника до $2F$, расстояние до изображения в этом случае тоже будет равно $2F$ – результирующая сила обратится в ноль.

Немного сложнее ответить на второй вопрос задачи. В

этом случае источник находится на расстоянии $3F$, а изображение – на расстоянии $1,5F$. Число падающих на линзу фотонов примерно в 9 раз меньше, чем в первом случае (при заданном диаметре линзы $d = 0,1F$ углы получаются довольно малыми), прошедшие лучи идут под большими углами, чем падающие, – сила получится направленной от источника. Разность множителей $(1 - \cos \varphi_2) - (1 - \cos \varphi_3)$, где углы нужно брать с учетом изменившихся расстояний от источника до линзы и от линзы до изображения, получится примерно в 3 раза меньше, чем в первом случае. Таким образом, полная сила изменит направление и уменьшится приблизительно в 30 раз. (Более точный расчет для таких случаев смысла не имеет, хотя вместо «среднего косинуса» можно было честно учесть возможные углы падения и взять несложный интеграл – ответ изменился бы незначительно.)

А.Линзов

Как рассмотреть нанообъект в оптический микроскоп

(Начало см. на с.23)

разрешение. Приборы, работающие по этому принципу, и называются сканирующими оптическими микроскопами ближнего поля. Они появились 25 лет тому назад.

Суть второй группы методов сводится к следующему. Вместо того чтобы заставлять соседние нанообъекты светить по очереди, можно использовать объекты, которые светятся разными цветами. В этом случае с помощью светофильтров, пропускающих свет того или иного цвета, можно определять положение каждого из объектов, а потом – составлять единую картину. Это очень похоже на то, что изображено на

рисунке 5, только цвета для трех изображений будут различными.

Последняя группа методов, позволяющих преодолеть дифракционный предел и рассмотреть нанообъекты, использует свойства самих светящихся объектов. Существуют такие источники, которые можно «включать» и «выключать» с помощью специально подобранного света. Такие переключения происходят статистически. Иначе говоря, если имеется много переключаемых нанообъектов, то, подобрав длину волны света и его интенсивность, можно заставить «выключиться» только часть из этих объектов. Остальные объекты будут продолжать светить, и можно получить от них изображение. После этого надо «включить» все источники и снова «выключить» часть из них. Набор оставшихся «включенными» источников будет отличаться от набора, который остался «включенным» в

первый раз. Повторяя такую процедуру много раз, можно получить большой набор изображений, отличающихся друг от друга. Анализируя такой набор, можно установить местоположение большой доли всех источников с очень высокой точностью, значительно превышающей дифракционный предел. Пример сверхразрешения, полученного таким способом, приведен на рисунке 6.

В настоящее время оптическая микроскопия со сверхразрешением быстро развивается. Можно со всей уверенностью предполагать, что в грядущие годы эта область будет привлекать все большее число исследователей, и хочется верить, что среди них будут и читатели этой статьи.

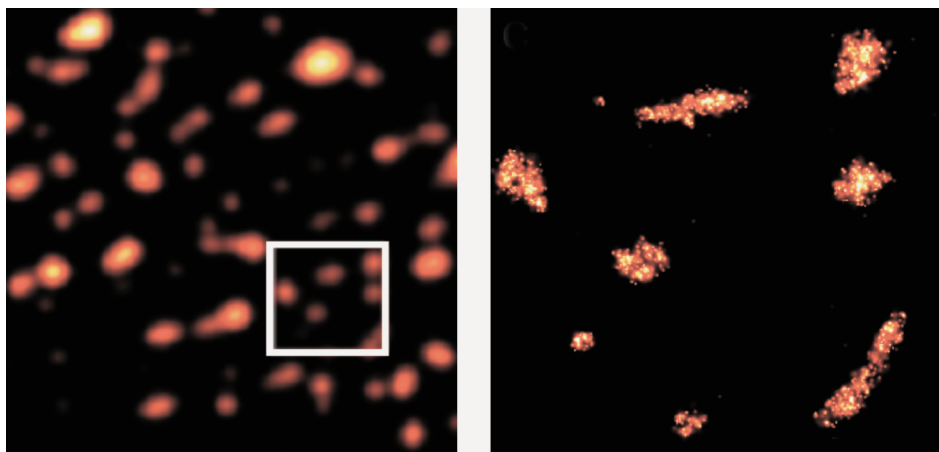
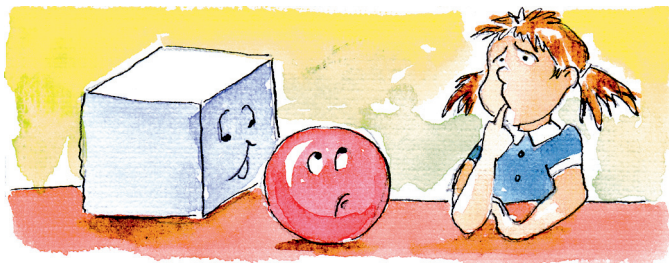


Рис.6. Сравнение изображения, полученного с помощью обычного микроскопа (слева) и одним из методов оптического сверхразрешения (справа). Сторона правого изображения соответствует $2,5 \text{ мкм}$. Это приблизительно в $10\text{--}12$ раз больше, чем величина $\lambda/(2n \sin u)$ для используемого объектива и длины волны света. Область, которая со сверхразрешением изображена на правом рисунке, на левом рисунке выделена квадратом

Задачи

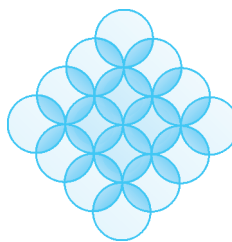
1. Число КУБ является кубом. Докажите, что число ШАР кубом не является. (Как обычно, разные заглавные буквы обозначают разные цифры.)

А.Хачатурян



2. Круги радиуса 1 (и значит, площади π) наложены друг на друга так, что их границы образуют кружевную салфетку (см. рисунок). Найдите площадь фигуры, являющейся объединением этих кругов.

Н.Авилов



3. Саша взял ручку с тонким пером и красиво, как его учили, по клеточкам написал слово (рис.1).

Артем взял толстый фломастер и тоже красиво написал другое слово (рис.2).

А Маша взяла широкое-широкое плакатное перо и написала третье слово (рис.3).

Какое слово написала Маша?

Е.Соколов

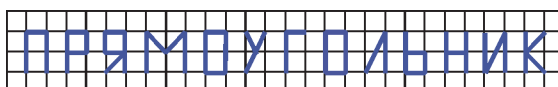


Рис. 1



Рис. 2

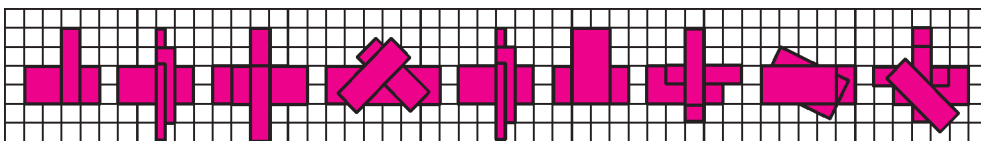


Рис. 3

4. Низкую температуру, нужную для хранения продуктов, люди издавна умели получать без холодильников. Для этого они зимой закладывали в подвалы лед, а летом размолотый лед смешивали с солью. При перемешивании льда с солью температура смеси может опуститься до -21°C (проверьте это на опыте), как в современных морозильных камерах.

А зачем дворники зимой посыпают дорожки солью? Они что, хотят температуру на улице понизить?

Е.Соколов



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

5. У мудрого ламы было два ленивых ученика. Как-то лама решил их проучить и предложил сыграть в старинную игру. Они сели за круглый стол, на который было высыпано 999 спичек. Ученику, который сел по левую руку от ламы, разрешается за ход брать либо 1, либо 3, либо 5 спичек. Ученик, который сидит по правую руку от ламы, берет за ход либо 2, либо 4, либо 6 спичек. Лама, в силу своей мудрости, всегда берет ровно 1 спичку. Первый ход делает лама, затем ходы делаются по очереди по часовой стрелке. Тот, кто не может сделать ход, пропускает его. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто выиграет?

Фольклор



Иллюстрации Д.Гришуковой

Мыльные пузыри и хорды

А. ШЕНЬ

Формулировка задачи

Три окружности попарно пересекаются (рис.1). Для каждой пары пересекающихся окружностей провели их общую хорду. Докажите, что три такие хорды проходят через одну точку.

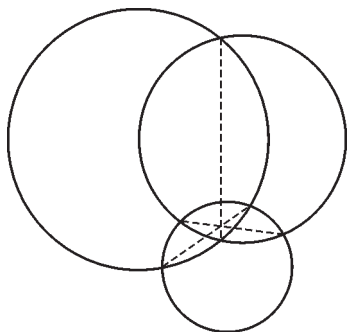


Рис. 1

Эту задачу вполне можно решить, оставаясь в рамках планиметрии (и мы приведем такое решение). Но у нее есть красивое (хотя и не вполне строгое) решение, использующее выход в пространство. Начнем издалека.

Полусфера на плоскости

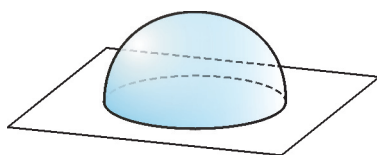


Рис. 2

Разрежем сферу плоскостью, проходящей через ее центр («по экватору»). Получатся две полусферы. Положим одну из них («северное полушарие») на плоскость (рис.2).

Как знают физики, именно такой вид (полусфера) имеет мыльный пузырь на поверхности воды (рис.3).

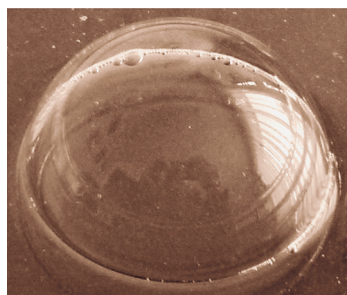


Рис. 3

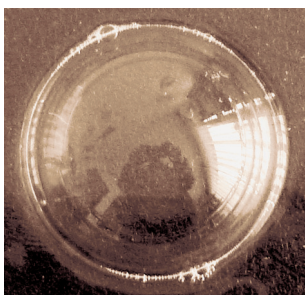


Рис. 4

Если посмотреть на него сверху, то будет видна просто окружность (рис.4).

Две полусферы

Теперь положим на горизонтальную плоскость две полусферы так, чтобы они пересекались (рис.5). Две сферы пересекаются по окружности. Эта окружность лежит в вертикальной плоскости. (В самом деле, она перпендикулярна прямой, соединяющей центры сфер, а в нашем случае центры сфер лежат на плоскости.)

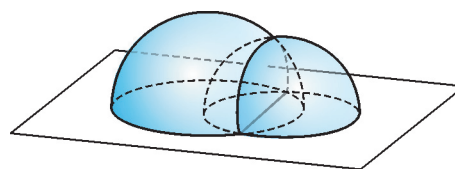


Рис. 5

И снова это хорошо видно на мыльных пузырях (рис.6).

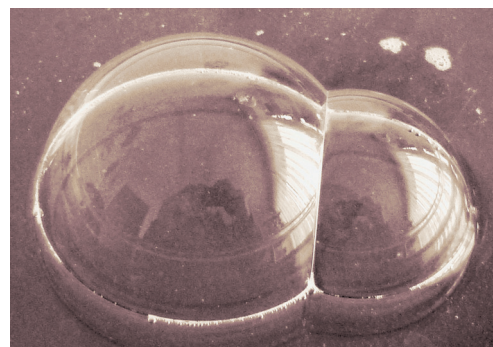


Рис. 6

Посмотрим на них сверху (рис.7): тогда от каждой полусферы мы увидим окружность (точнее, ее часть,

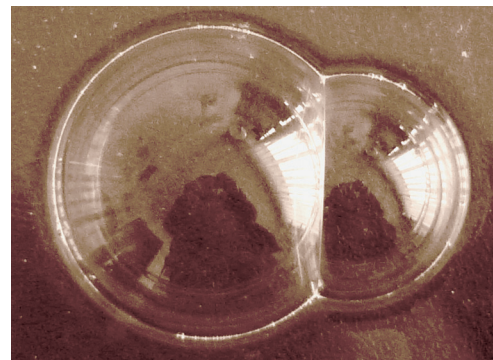


Рис. 7

лежащую вне другой). Окружность, по которой пересекаются полусферы, превратится в прямую (ведь она лежит в вертикальной плоскости).

Возвращаясь к геометрии, мы видим две окружности и общую хорду (рис.8).

Решение задачи

Наверное, вы уже поняли, к чему идет дело и как решить нашу задачу

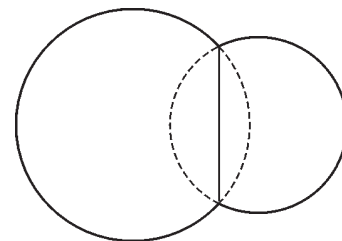


Рис. 8

с помощью выхода в пространство. Будем считать плоскость горизонтальной, а окружности на ней – изображениями сфер. Тогда линии пересечения сфер (три окружности в вертикальных плоскостях) будут изображены отрезками (общими хордами). Точка пересечения всех трех сфер попадет на эти три отрезка – значит, они проходят через общую точку, что и требовалось доказать.

В качестве иллюстрации к этому решению можно привести три примыкающих друг к другу мыльных пузыря (рис.9).

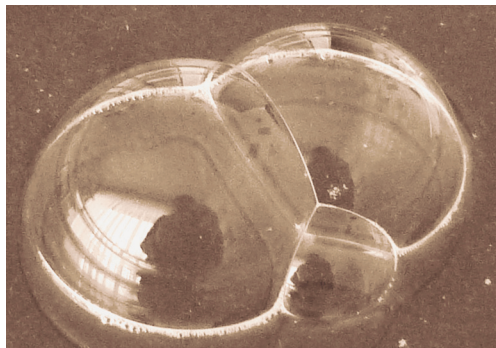


Рис. 9

Вид сверху представляет собой три окружности и три общие хорды, пересекающиеся в одной точке (рис.10). Точнее говоря, тут видны лишь части этих окружностей и хорд, находящиеся вне других пузырей (внутри



Рис. 10

пузырей устроены иначе)

Полусфера как график

Это решение можно переделать в двумерное, если рассматривать полусферу как график функции двух переменных. Объясним, что это значит.

Представьте себе, что вы живете внутри полусферы и ее купол для вас служит потолком. Высота этого потолка в разных точках круглой комнаты разная. Самая большая высота – в центре комнаты (она равна радиусу полусферы). К краю комнаты она уменьшается до нуля (потолок становится стеной).

Как найти высоту потолка над некоторой точкой M ? Оказывается, что можно обойтись без лазерного дальномера или лестницы. Достаточно провести через точ-

ку M прямую на полу (рис.11), измерить расстояния a и b до стены в обоих направлениях и найти высоту по формуле $h = \sqrt{ab}$ (она равна, как говорят, среднему геометрическому расстояний a и b).

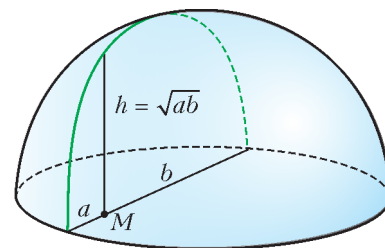


Рис. 11

В самом деле, в вертикальном сечении, проходящем через отрезки a и b , мы получаем прямоугольный треугольник, опирающийся на диаметр окружности сечения (рис.12). В нем высота h равна среднему геометрическому отрезков a и b , на которые она делит гипотенузу, поскольку прямоугольные треугольники AMH и HMB подобны:

$$a : h = h : b.$$

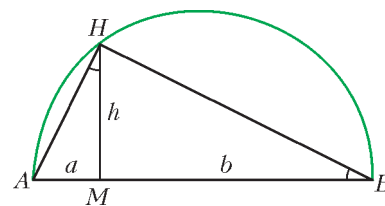


Рис. 12

Степень точки

Заметим, что прямую на полу можно проводить по-разному, и отрезки a и b будут разными, но высота должна быть одинаковой, так что произведение ab не зависит от выбора прямой. Раньше эта теорема входила в школьный курс геометрии (теорема об отрезках пересекающихся хорд). Ее можно доказать безо всяких сфер, из подобия треугольников AMA' и $B'MB$ (рис.13):

$$a : a' = b' : b.$$

Произведение отрезков хорды называют *степенью* точки относительно окружности; так, степень точки M равна произведению ab (а также произведению $a'b'$). Таким образом, высота полусферы над точкой равна квадратному корню из степени этой точки.

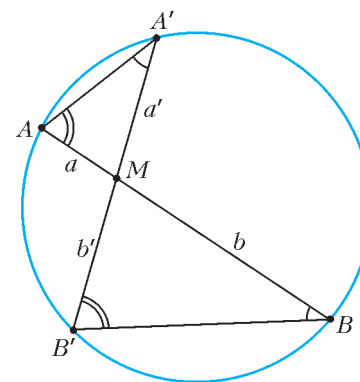


Рис. 13

Вернемся к двум полусферам, опирающимся на две окружности.

Представим себе, что мы стоим под линией пересечения этих полусфер (т.е. на общей хорде окружностей). Тогда обе полусферы находятся на одной высоте. Следовательно, *если точка лежит на общей хорде двух окружностей, то ее степени относительно обеих окружностей одинаковы*.

Это, впрочем, ясно безо всяких сфер: если точка лежит на хорде, то ее степень (относительно любой из окружностей) равна произведению отрезков хорды (рис.14). А если точка лежит сбоку от хорды, то один из отрезков будет общим, а другие отрезки будут разными, так что степени тоже будут разными (рис.15).

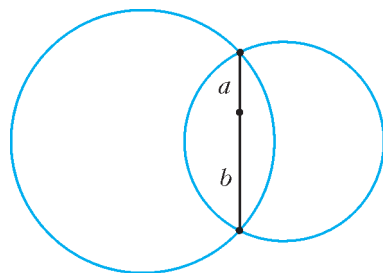


Рис. 14

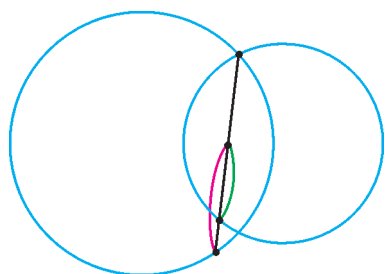


Рис. 15

Планиметрическое решение

Вернемся к исходной задаче и рассмотрим три пересекающихся окружности (1, 2 и 3 на рисунке 16). Проведем две общие хорды: одну – для окружностей 1 и 3 и вторую – для окружностей 2 и 3. Точки на первой хорде имеют, как мы видели, одинаковую степень относительно окружностей 1 и 3, а точки на второй хорде имеют одинаковую степень относительно окруж-

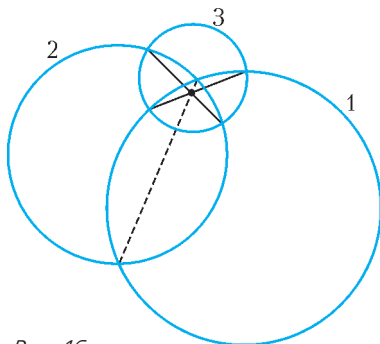


Рис. 16

ностей 2 и 3. Значит, общая точка этих двух хорд имеет одинаковую степень относительно всех трех окружностей. Поэтому она также лежит на общей хорде окружностей 1 и 2. Что и требовалось доказать.

Это решение можно пересказать так, чтобы оно стало совсем «школьным» и не использовало понятие степени (рис. 17). Проведем две общие хорды AB (окружности 2 и 3) и CD (окружности 1 и 3). Пусть O – их точка пересечения. Проведем прямую через точку O и одну из двух точек пересечения окружностей 1 и 2 (скажем, верхнюю на рисунке) – точку E .

Если утверждение задачи неверно, то эта прямая пересечет окружности 2 и 1 в различных точках. Назовем их F и F' . Теперь заметим, что

$$EO \cdot OF = AO \cdot OB$$

по теореме об отрезках двух секущих (в окружности 2).

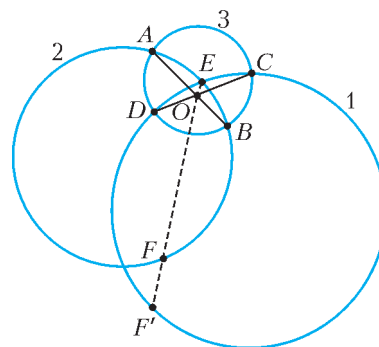


Рис. 17

По той же теореме, но уже для окружности 3, равенство можно продолжить:

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD,$$

и дальше (окружность 1)

$$CO \cdot OD = EO \cdot OF'.$$

Сравнивая начало и конец этой цепочки равенств, получаем

$$EO \cdot OF = EO \cdot OF',$$

т.е. F и F' – одна и та же точка, что и требовалось доказать.

Вопросы и задачи

1. Обратите внимание, как расположена пленка, разделяющая мыльные пузыри. В какую сторону она изогнута? В каком из пузырей давление больше? (На наших фотографиях эта пленка видна плохо, так что стоит посмотреть настоящие пузыри.)

2. Чему равна степень точки, находящейся на расстоянии d от центра окружности радиуса r , относительно этой окружности?

3. Мы определили степень для точек внутри окружности. Дайте геометрическое определение для точек вне окружности, чтобы формула задачи 2 оставалась верной.

4. Рассмотрим две окружности (пересекающиеся или нет). Найдите геометрическое место точек, которые имеют одинаковую степень (в смысле предыдущей задачи) относительно этих двух окружностей.

Ответ: это прямая; она называется *радикальной осью* пары окружностей.

5. Найдите радикальную ось для пары касающихся окружностей.

6. Имеются три попарно касающиеся окружности. Через каждую из точек касания проведена общая касательная к соответствующей паре. Докажите, что три эти прямые проходят через одну точку.

7. Во всех наших рассуждениях мы неявно предполагали, что окружности не только попарно пересекаются, но и все три перекрываются (есть точка, лежащая внутри всех трех). Если такой точки нет, наши рассуждения уже не проходят. Покажите, что, тем не менее, и в этом случае три общие хорды (точнее, их продолжения) пересекаются.

Тепловые явления глазами пассажира автобуса

В. КОТОВ

ПОЛЬЗУЯСЬ ОБЩЕСТВЕННЫМ ТРАНСПОРТОМ, МЫ замечаем множество происходящих вокруг нас физических явлений, в том числе и тепловых.

Поручни салона. Почему металлические поручни в салоне автобуса покрывают эмалью, хотя никелированные выглядят также красиво? Ответ прост. Дело здесь не в красоте, а в теплопроводности материала, к которому прикасаются руки пассажиров. Зимой поручни, покрытые эмалью, из-за малой теплопроводности последней отводят мало тепла и не создают неприятных ощущений, в то время как холодные металлические поручни обжигают руки людей холодом, отнимая у них большое количество тепла из-за хорошей теплопроводности. Но зато в жаркое время у пассажиров часто потеют ладони рук, которыми они держатся за поручни, покрытые эмалью. Теперь поручни отводят лишь малую часть выделяемого руками тепла, на что перегревшийся организм реагирует выделением пота.

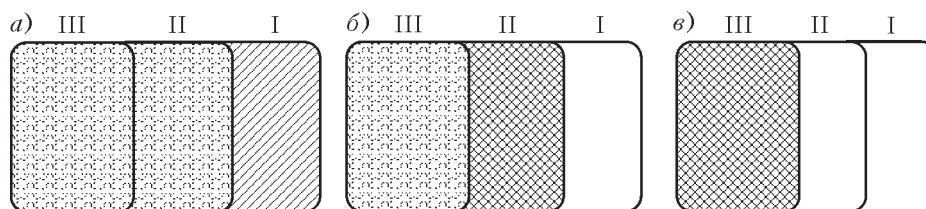
Все предметы, с которыми соприкасается тело пассажира, должны обеспечивать определенный отток тепла, не допуская переохлаждения зимой и перегревания летом. Поэтому становится понятной целесообразность деревянных или покрытых кожей сидений в электропоездах, подушек сидений из резины или искусственной кожи в автомобилях (дополнительно смягчают неприятные толчки на ухабах), эмалированных металлических сидений в трамваях. Все это должно создавать комфортные условия для пассажиров как зимой, так и летом.

Дождь на стекле. Что происходит на оконных стеклах автобуса во время дождя? Вертикально падающие капли дождя оставляют на наружной поверхности стекла наклонные водяные полоски. Причем наклон следа тем больше, чем быстрее едет автобус. А как ведут себя капли, оседающие на стекле изнутри, т.е. капли, попадающие через открытые форточки или сконденсировавшиеся на холодном стекле из влажного воздуха салона? Одни из них остаются неподвижными, а другие ползут по стеклу, оставляя за собой водяную дорожку. Ее наклон зависит (если не учитывать воздействия струи воздуха) уже не от скорости, а от ускорения автобуса. Перемещаться начинают те капли, чья сила тяжести превосходит силу сцепления со стеклом. А след за ползущей каплей остается

из-за того, что сила взаимного притяжения между молекулами воды и стекла больше, чем между молекулами воды (смачивание).

Испарение и конденсация воды на оконном стекле после дождя. Данное наблюдение проходило после дождя в салоне электропоезда. Внешняя температура была около 18 °С, стекло электропоезда снаружи было равномерно покрыто каплями дождя разного размера. Окна были закрыты, поэтому влажность воздуха внутри была высокой.

В процессе наблюдения различных фазовых превращений воды оказалось возможным выделить на стекле три характерные вертикальные зоны (см. рисунок). При обдувании, связанном с движением поезда, сначала испаряются капли на передней части внешней стороны стекла (зона I, рис. а), так как скорость испарения зависит от конвекции. Затем (рис. б) прилегающая к ней зона II стекла запотеваает изнутри, при этом следующая за ней зона III изнутри остается чистой. Видимо, в зоне II происходит интенсивное испарение наружных капель, из-за потери энергии стекло охлаждается ниже точки росы, вследствие чего на нем изнутри конденсируется вода. Наиболее интенсивно испаряются наружные капли, расположенные впереди по ходу движения (в зоне II), и это препятствует испарению следующих по ходу движения капель (в зоне III) из-за повышения влажности обдуваемого их потока воздуха. После испарения наружных капель в зоне II она очищается и от внутреннего конденсата, так как интенсивная потеря энергии прекращается и температура стекла повышается. Затем начинается испарение наружных капель в зоне III, и она запотеваает изнутри (рис. в). Наконец, зона III оказывается покрытой отдельными внутренними туманными пятнами вокруг оставшихся наружных капель. Такой процесс наблюдается до полного очищения стекла.



Наблюдаемая картина физических превращений воды на оконном стекле электропоезда. Здесь □ — чистое стекло, ● — капли дождя на внешней стороне стекла, ▨ — испаряющиеся капли на внешней стороне стекла, ▨ — область запотевания на внутренней стороне стекла



Ледяные узоры на стекле



Лед на стеклах. Зимой окна автобуса часто бывают покрыты инеем или разрисованы изнутри морозными узорами. Их вид зависит от температуры и влажности воздуха в салоне. При малой влажности и постепенном охлаждении от 0 до -6°C на поверхности стекла отлагается однородный слой непрозрачного рыхлого льда. В этом случае все стекло имеет температуру ниже точки росы, и влага из воздуха одновременно конденсируется по всей поверхности стекла, покрывая его слой за слоем и образуя аморфное непрозрачное состояние льда.

Если же охлаждение стекла происходит при большой влажности воздуха, а в процессе охлаждения проходит точка росы, то конденсирующаяся на стекле вода закристаллизовывается в виде морозных узоров, похожих на еловые лапы или ветки диковинных растений, отбирая при этом тепло от близлежащих участков стекла. Такие узоры называют дендритами. При дальнейшем охлаждении стекол между дендритами, а затем и на самих дендритах происходит отложение тонкого слоя инея. Иногда температура и влажность таковы, что протертое стекло замерзает прямо на глазах, покрываясь ледяными кристаллами.

Как-то после оттепели резко похолодало, и узоры из более крупных дендритов покрыли нижнюю часть оконных стекол, вверху же кристаллы были заметно мельче. Почему? Объяснить нетрудно. Кристаллы образуются из сконденсировавшейся на стекле воды, а она, вследствие действия силы тяжести, течет и скапливается внизу.

Зимой холодный воздух может проникать в салон автобуса через щели рам и открытые форточки. С ним приходит в соприкосновение теплый и влажный воздух салона, который при этом охлаждается, теряя излишнюю влагу. Почему же в местах проникновения наружного воздуха стекла не запотевают и не замерзают? В данном случае внутри салона происходят два процесса: не только теплый воздух охлаждается, но и холодный воздух, попадая в салон, нагревается и поглощает воду, так как его влагоемкость увеличивается. Это легко подтвердить экспериментально.

Если вы носите очки, то знаете (впрочем, это все знают), что зимой при входе с улицы в теплое помещение они запотевают. Но мало кто обращал внимание на следующее: стоит, не протирая очков, снова выйти на холод, как влага с них полностью испарится. Прodelайте такой опыт с куском стекла, который лучше держать не в руке, а за какую-нибудь оправу.

Приведу еще ряд наблюдений.

Один раз я подышал на протертый в замороженном окне участок, и он быстро покрылся пушистым инеем, причем с более длинными иголками, чем на остальном стекле. В другой раз при наружной температуре -25°C на протертом участке за 5–7 минут вырос более толстый слой инея, чем на непротертом стекле, причем дышать на стекло в этот раз не пришлось. По-видимому, процесс наращивания слоя инея на стекле зависит от сочетания определенных условий: температуры и влажности в салоне и за окном. Появлялись на стекле, вырастая на глазах, и ледяные кристаллы в виде ледяных волокон (трихитов) или ледяных узоров в виде еловых лап (дендритов). Интересно, что во время роста они были окружены небольшим свободным от инея пространством стекла. Как и предполагалось ранее, выделяющаяся энергия кристаллизующейся воды влияет на условия в окружающем дендрит пространстве, препятствуя возникновению других кристаллов вблизи и вокруг растущих. Согласно измерениям ученых, осаждение льда на поверхность сопровождается колебаниями температуры вблизи нее величиной до $+5^{\circ}\text{C}$, что оказывает на существование в этой области ощутимого выделения тепла и передачи его путем конвекции.

Сказанное подтверждается следующим наблюдением за стоящим в депо электропоездом. Оконные стекла поезда были двойные, наружная температура воздуха была около -12°C . На внешней поверхности внешних стекол имелись крупинки льда – от замерзших редких капель воды. Внутреннее же стекло со стороны салона было покрыто слоем белого инея с округлыми пятнами чистого стекла, центры которых совпадали с расположением замерзших капель снаружи.